

Специальности:	<ul style="list-style-type: none"><li>• Авионика</li><li>• Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии</li><li>• Авиационный транспорт</li></ul>
Дисциплина:	Теория автоматического управления
Курс, семестр, уч. год:	3, осенний, 2019/2020
Кафедра:	301 – СУЛА
Руководитель обучения:	Профессор, д.т.н. Кулик Анатолий Степанович

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛЕКЦИИ № 4

### ТЕМА: ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ



*Все элементы мироздания гармонично связаны между собой*

*Марк Туллий Цицерон (106 – 43 г.г. до н. э.) – древне-римский политический деятель, оратор и писатель*

#### I. ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

##### ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

- солнечная система;
- свет;
- суточные изменения;
- смена времён года;
- астрономические циклы;
- биоритмы;
- радиоволны;
- переменный электрический ток;
- приливы и отливы;
- подъёмы и спады в экономике;
- музыка;
- часы;
- ДВС.
- ?

ГАРМОНИЯ [гр. harmonia]-  
1) согласованность, стройность в сочетании чего-либо.  
ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ -  
раздел математики, изучающий разложение функций в ряды по гармоникам, т. е. по синусам и косинусам.  
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ – это колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса.  
СИС, М., 1986г.

**Частотные характеристики** – это характеристики преобразовательных свойств линеаризованных объектов исследования в определенном частотном диапазоне – полосе пропускания.



**Частотная характеристика** – это реакция линейного объекта в установившемся режиме на синусоидальный входной сигнал при изменении его частоты во всем возможном диапазоне.

**NB:**

- Какие объекты могут быть в качестве объектов исследования?
- Для линейных объектов выполняется принцип суперпозиции!
- В чем суть принципа суперпозиции?

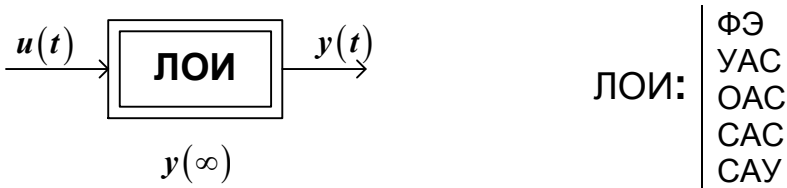


Линейные объекты получаются в результате линеаризация исходных нелинейных объектов.

РАЗЛИЧАЮТ	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ амплитудно-частотные</li> <li>▪ фазо-частотные</li> <li>▪ амплитудно-фазо-частотные</li> </ul>	} ХАРАКТЕРИСТИКИ	АЧХ
			АФЧХ
СПОСОБЫ ПОЛУЧЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ экспериментальный</li> <li>○ аналитический</li> </ul>	

II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

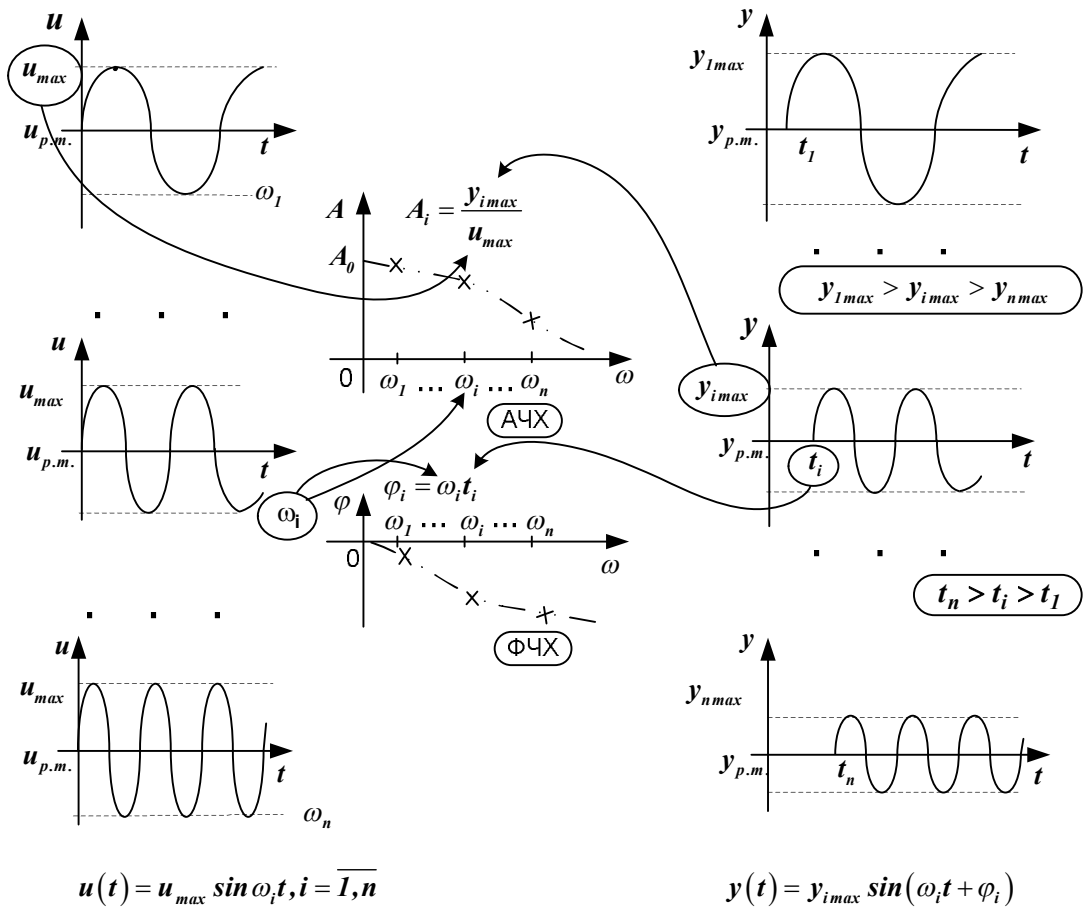
► ПО УПРАВЛЯЮЩЕМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ



Исходные данные:

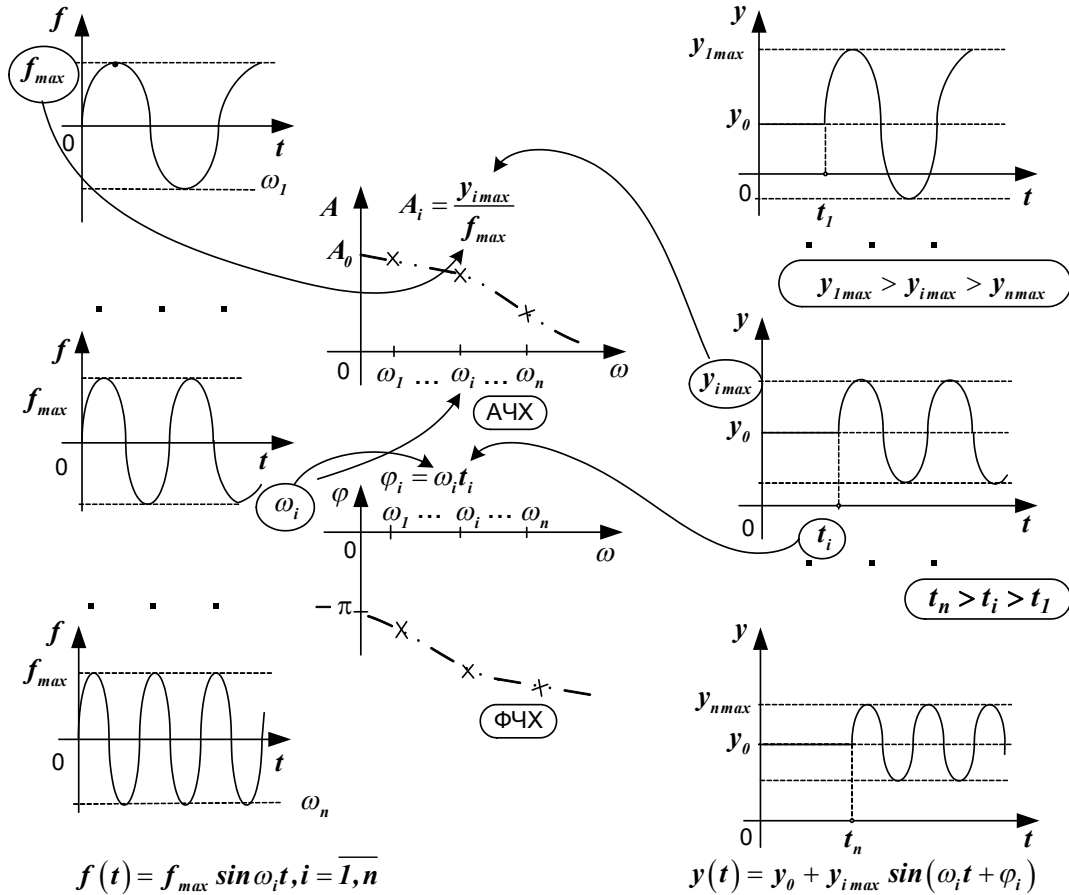
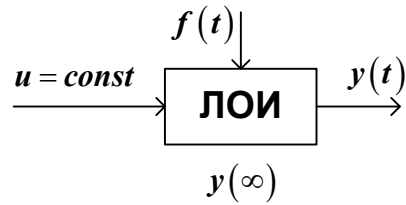
1) Р.Т.; 2)  $\delta$ ; 3)  $u(t) \in U$ ; 4)  $y(t) \in Y$ ;

5)  $W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ ; 6)  $\hat{a}_i, i = \overline{0, n}, \hat{b}_j, j = \overline{0, m}$ .



УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ !

► ПО ВОЗМУЩАЮЩЕМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ  $f(t)$



$$f(t) = f_{max} \sin \omega_i t, i = \overline{1, n}$$

$$y(t) = y_0 + y_{i_{max}} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ !

### III. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОЛУЧЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Исходные данные:

$$1) W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0};$$

2)  $\delta$ ; 3) Р.Т.; 4)  $u(t) \in U$ ; 5)  $y(t) \in Y$ ; 6)  $\hat{a}_i, i = \overline{0, n}, \hat{b}_j, j = \overline{0, m}$ .

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$W(s)_{s=j\omega} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0};$$

$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$  – алгебраическая форма,

где  $U(\omega)$  – вещественная часть;

$V(\omega)$  – мнимая часть.

$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  – показательная форма,

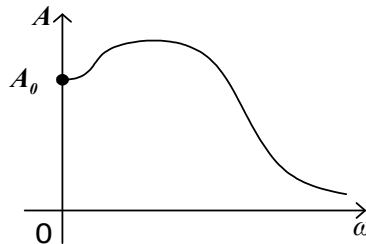
где  $A(\omega)$  – АЧХ;

$\varphi(\omega)$  – ФЧХ.

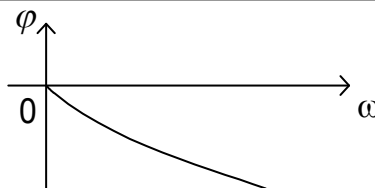
$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}.$$



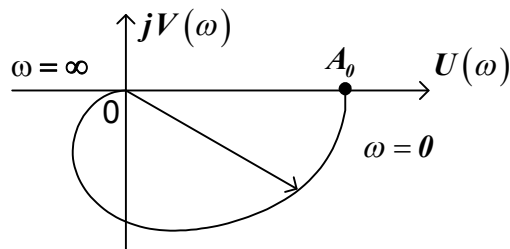
**Амплитудно-частотные характеристика (АЧХ) линейризованного объекта исследования** называется зависимость отношения амплитуды выходного гармонического сигнала к амплитуде входного гармонического сигнала от частоты.



**Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) линейризованного объекта исследования** представляет зависимость разности фаз выходного и входного гармонического сигнала от частоты.



**Амплитудно-фазо-частотная характеристика (АФЧХ) линейризованного объекта исследования** представляет собой траекторию движения (годограф) конца вектора  $W(j\omega)$  при изменении частоты.





*Частотные характеристики, построенные в логарифмических шкалах, называются логарифмическими частотными характеристиками.*

Логарифмические шкалы по одной или обеим осям могут использоваться при построении любых частотных характеристик. Чаще всего строятся характеристики  $A(\lg \omega)$ ,  $\varphi(\lg \omega)$ , называемые соответственно логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ) и логарифмической фазо-частотной характеристикой (ЛФЧХ).

При построении логарифмических характеристик на шкале частот вместо  $\omega$  откладывается  $\lg \omega$ . Единицами измерения логарифмических координат является декада (дек) и децибел (дБ).

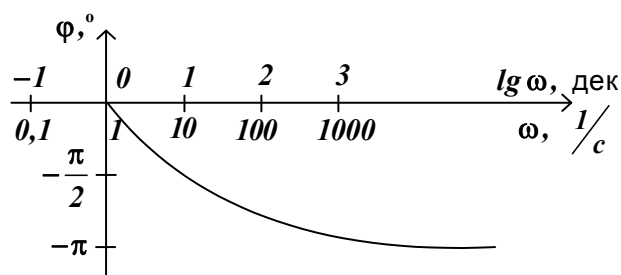
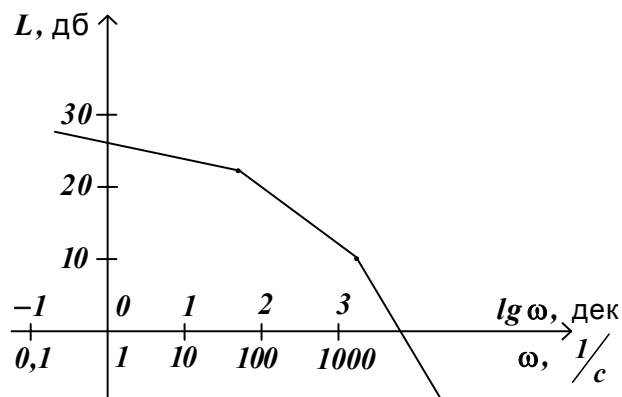


**Логарифм – величина безразмерная и указанные «единицы измерения» вводятся условно для удобства.**



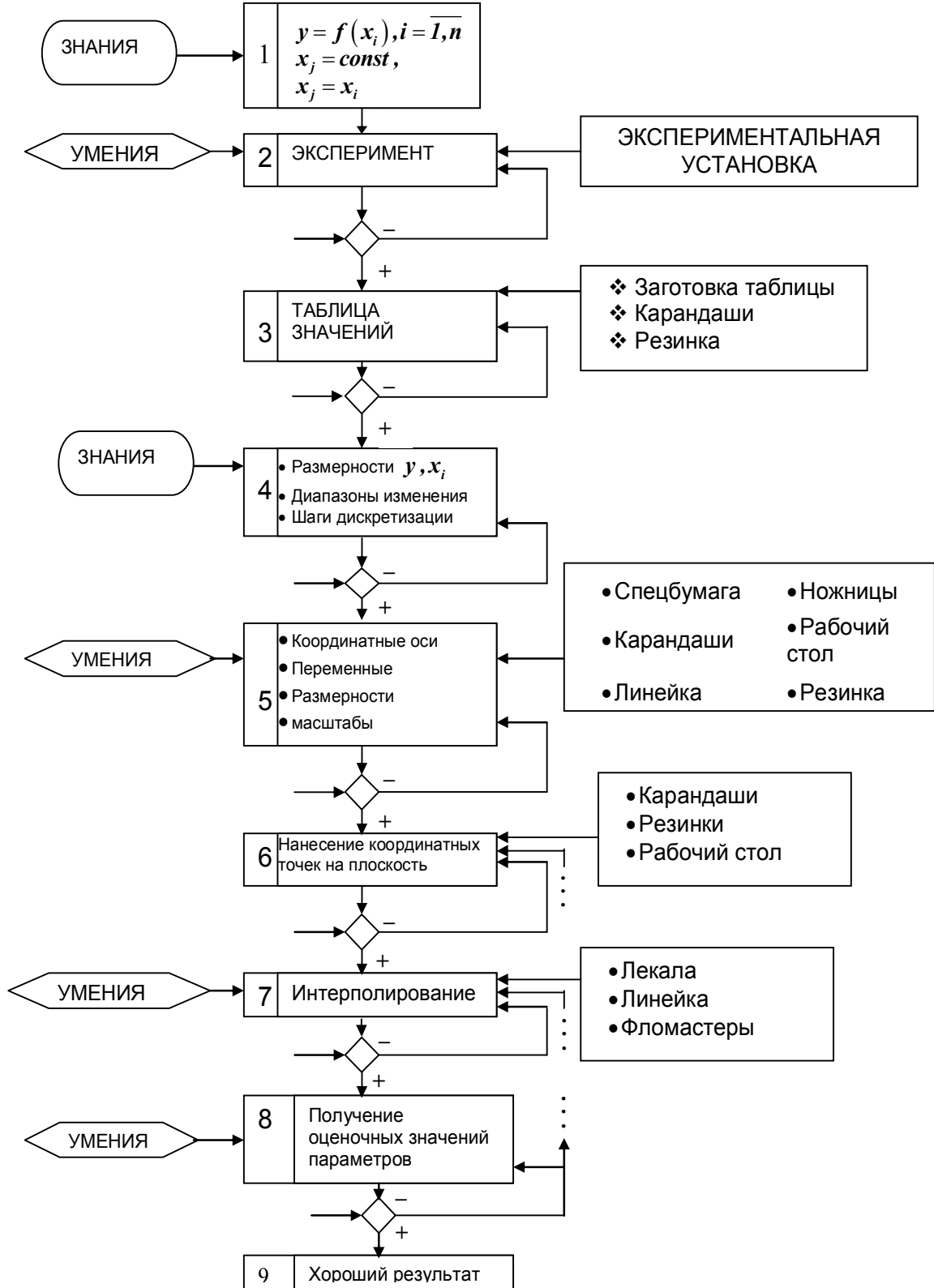
**Декадой называется интервал частот, соответствующий изменению частот в 10 раз.**

На логарифмической шкале декада, изображенная отрезком единичной длины, так как  $\lg 10 - \lg \omega = 1$ . Поэтому относительно величины  $\lg \omega$  логарифмическая шкала является равномерной, а относительно частоты  $\omega$  – неравномерной.



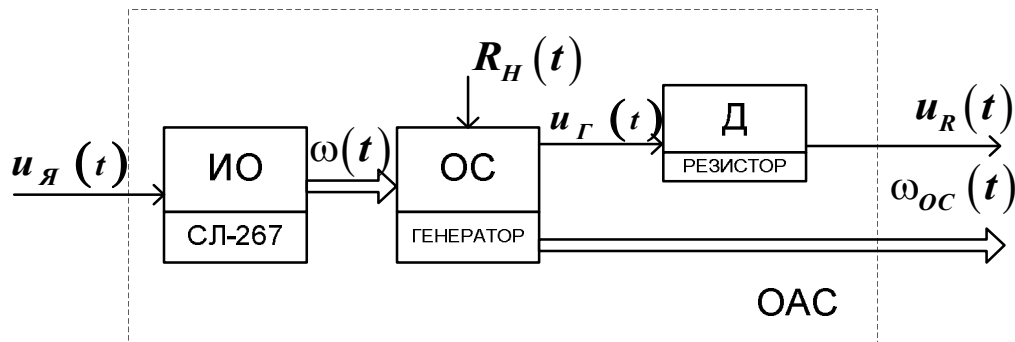
- Как строить графики частотных характеристик ?
- Что для этого нужно ?
- Какова технология построения ?

### ЭСКИЗ ТЕХНОЛОГИИ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ



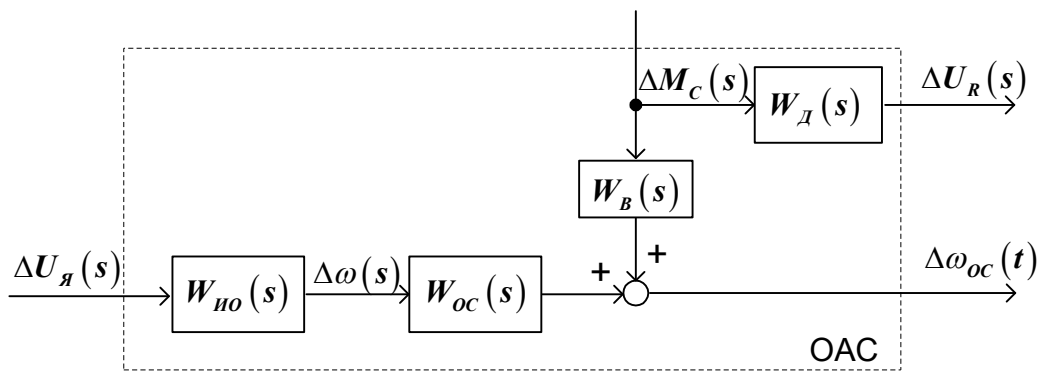
#### IV. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОЛУЧЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ОБЪЕКТА АВТОМАТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Функциональная схема, отражающая информационный аспект стендового ОАС лаборатории «Автоматического управления», имеет такой вид:

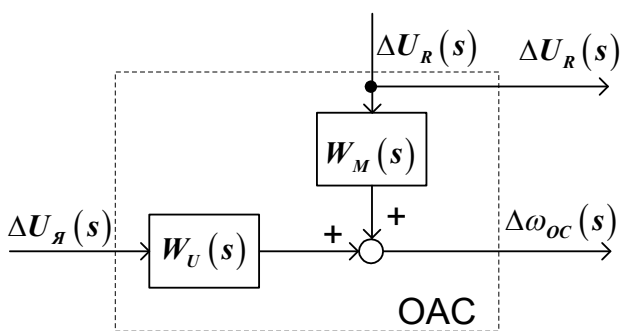


Здесь  $U_{я}(t), B$  – напряжение управления на якорную обмотку электродвигателя;  $\omega(t), \frac{1}{с}$  – угловая скорость вала электродвигателя;  $U_G(t), B$  – напряжение генератора;  $R_H(t), Ом$  – изменяющееся сопротивление нагрузки на генератор (возмущающее воздействие);  $U_R(t), B$  – результат измерений последствий возмущающего воздействия;  $\omega_{oc}(t)$  – угловая скорость генератора – объекта стабилизации.

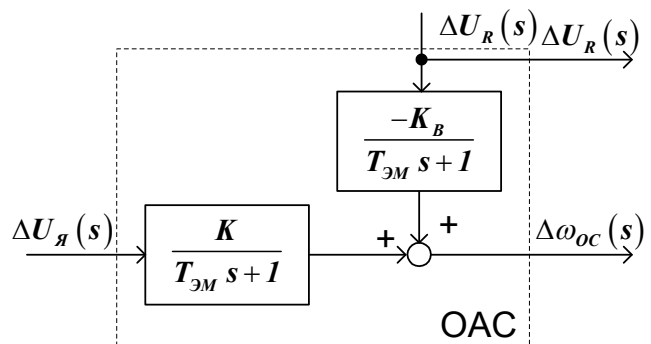
В результате обработки (Какой?) экспериментальных данных (Каких?) структурная схема ОАС представимы в таком виде:



а)



б)

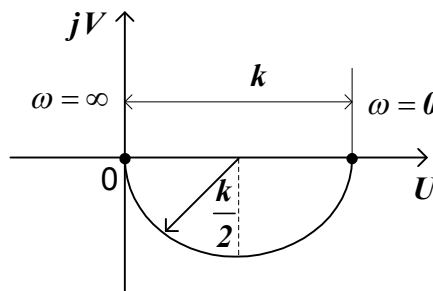


в)

Рассмотрим методику построения частотных характеристик ОАС по управляющему и возмущающему воздействиям.

$$W_U(s) = \frac{\Delta\omega_{OC}(s)}{\Delta U_{Я}(s)} = \frac{k}{T_{ЭМ}s + 1};$$

$$W_U(s)|_{s=j\omega} = \frac{k}{[T_{ЭМ}(j\omega) + 1]} \frac{[-T_{ЭМ}(j\omega) + 1]}{[-T_{ЭМ}(j\omega) + 1]} = \frac{k}{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1} - j \frac{k T_{ЭМ} \omega}{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1}.$$



Исследуем форму АФЧХ:

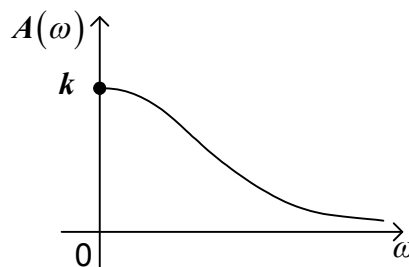
$$U(\omega) = \frac{k}{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1}; \quad V(\omega) = \frac{k T_{ЭМ} \omega}{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1};$$

$$U^2 + V^2 = \frac{k^2}{(T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1)^2} + \frac{k^2 T_{ЭМ}^2 \omega^2}{(T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1)^2} = \frac{k^2 (1 + T_{ЭМ}^2 \omega^2)}{(T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1)^2} = \frac{k^2}{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1} = kU;$$

$$U^2 + V^2 = kU; \quad U^2 - kU + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 + V^2 = \left(U - \frac{k}{2}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

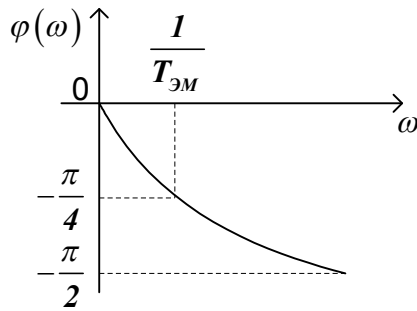
Полученное уравнение представляет собой уравнение окружности радиуса  $\frac{k}{2}$  с центром на вещественной оси на расстоянии  $\frac{k}{2}$  от начала координат. Положительным значениям аргумента  $\omega$  соответствует нижняя полуокружность, отрицательным – верхняя.

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{k^2}{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1} + \frac{k^2 T_{ЭМ}^2 \omega^2}{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1}} = \frac{k}{\sqrt{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1}}.$$



$$\varphi(\omega) = \arctg -T_{ЭМ} \omega = -\arctg T_{ЭМ} \omega$$





Аналогично, постройте, *ПОЖАЛУЙСТА*, по возмущающему воздействию.

$$W_M(s) = \frac{\Delta \omega_{oc}(s)}{\Delta U_R(s)} = \frac{-k_B}{T_{ЭМ} s + 1};$$

## V. АДЕКВАТНОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК



*Адекватный – вполне соответствующий, совпадающий.*

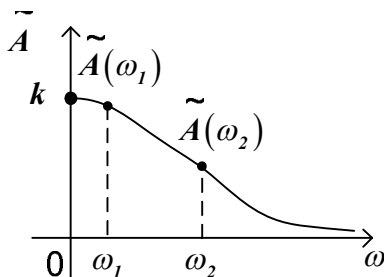
- ограничения
  - входные сигналы,  $\Delta U_{я}(s) \in U_{я}, \omega_i \in \Omega_1; \Delta U_R(s) \in U_R, \omega_j \in \Omega_2$ .
  - выходной сигнал,  $\Delta \omega_{oc} \in \omega_{oc}$ ;
  - полоса пропускания,  $\omega_n$ .

- Как установить адекватность аналитических частотных характеристик ?
- Какие количественные оценки адекватности можно использовать ?

## VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ $\hat{k}$ И $\hat{T}_{\dot{y}}$ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ АЧХ

Определение оценочных значений параметров  $\hat{k}$  и  $\hat{T}_{\dot{y}}$  из экспериментальных АЧХ

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1}}; \quad A^2(\omega) = \frac{k^2}{T_{ЭМ}^2 \omega^2 + 1};$$



$$\tilde{A}^2(\omega_1) = \frac{k^2}{T_{ЭМ}^2 \omega_1^2 + 1}; \quad k-?; T_{ЭМ}-?$$

$$\tilde{A}^2(\omega_2) = \frac{k^2}{T_{ЭМ}^2 \omega_2^2 + 1};$$

$$\underbrace{\tilde{A}^2(\omega_1)}_{\tilde{a}_1} \underbrace{\omega_1^2 T_{ЭМ}^2}_{\tilde{x}_1} + \underbrace{\tilde{A}^2(\omega_1)}_{\tilde{b}_1} = \underbrace{k^2}_{\tilde{x}_2}; \quad \tilde{a}_1 x_1 - x_2 = -\tilde{b}_1;$$

$$\underbrace{\tilde{A}^2(\omega_2)\omega_2^2}_{\tilde{a}_2} \underbrace{T_{\text{ЭМ}}^2}_{\tilde{x}_1} + \underbrace{\tilde{A}^2(\omega_2)}_{\tilde{b}_2} = \frac{k^2}{\tilde{x}_2}; \quad \tilde{a}_2 x_1 - x_2 = -\tilde{b}_2;$$

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 x_1 - x_2 = -\tilde{b}_1; \\ \tilde{a}_2 x_1 - x_2 = -\tilde{b}_2; \end{cases} \quad \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_1 & -1 \\ \tilde{a}_2 & -1 \end{vmatrix} = -\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2;$$

$$\tilde{\Delta} x_1 = \begin{vmatrix} \tilde{b}_1 & -1 \\ \tilde{b}_2 & -1 \end{vmatrix} = -\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2; \quad \tilde{\Delta} x_2 = \begin{vmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \end{vmatrix} = \tilde{a}_1 \tilde{b}_2 - \tilde{a}_2 \tilde{b}_1;$$

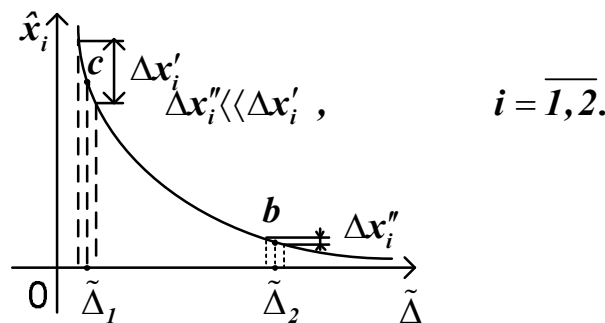
$$\hat{x}_1 = \frac{\tilde{\Delta} x_1}{\tilde{\Delta}} = \frac{-\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{-\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2}; \quad \hat{x}_2 = \frac{\tilde{\Delta} x_2}{\tilde{\Delta}} = \frac{\tilde{a}_1 \tilde{b}_2 - \tilde{a}_2 \tilde{b}_1}{-\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2};$$

$$\hat{x}_1 = \hat{T}_{\text{ЭМ}}^2 = \frac{-\tilde{A}^2(\omega_1) + \tilde{A}^2(\omega_2)}{-\tilde{A}^2(\omega_1)\omega_1^2 + \tilde{A}^2(\omega_2)\omega_2^2};$$

$$\hat{T}_{\text{ЭМ}} = \sqrt{\frac{\tilde{A}^2(\omega_2) - \tilde{A}^2(\omega_1)}{\tilde{A}^2(\omega_2)\omega_2^2 - \tilde{A}^2(\omega_1)\omega_1^2}};$$

$$\hat{x}_2 = \hat{k}^2 = \frac{\tilde{A}^2(\omega_1)\omega_1^2 \tilde{A}^2(\omega_2) - \tilde{A}^2(\omega_2)\omega_2^2 \tilde{A}^2(\omega_1)}{-\tilde{A}^2(\omega_1)\omega_1^2 + \tilde{A}^2(\omega_2)\omega_2^2};$$

$$\hat{k} = \tilde{A}(\omega_1) \tilde{A}(\omega_2) \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\tilde{A}^2(\omega_2)\omega_2^2 - \tilde{A}^2(\omega_1)\omega_1^2}}.$$



**НАСПАВЛЕНИЕ  
ЦИФРОНА**

: Следует жить в соответствии с природой