Материал к лекции можно просмотреть и скачать на сайте кафедры:
http://k301.info в разделе Дисциплины / Теория автоматического управления

Специальности:	• Авионика • Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии • Авиационный транспорт
Дисциплина:	Теория автоматического управления
Курс, семестр, уч. год:	3, осенний, 2019/2020
Кафедра:	301 – СУЛА
Руководитель обучения:	Профессор, д.т.н. Кулик Анатолий Степанович

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛЕКЦИИ № 7

ТЕМА: КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

$P_л$

«Задача, которую я себе поставил, предпринимая настоящее исследование, может быть сформирована так: указать те случаи, в которых первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости, и дает какие-либо способы, которые позволяли бы решать его по крайней мере в некоторых из тех случаев, когда по первому приближению нельзя судить об устойчивости»

Александр Михайлович Ляпунов (1857 – 1918) –
– выдающийся ученый, педагог, корифей
математического естествознания.
Докторская диссертация «Общая задача
устойчивости движения»

О

Критерий (гр. criterion – признак для суждения) – признак, основание, мерило оценки чего-либо.

1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ С ПОМОЩЬЮ 1-ГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

Первый метод Ляпунова позволяет судить об устойчивости реальной системы по корням характеристического уравнения линеаризованной системы:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 .$$

О

Необходимым и достаточным условием устойчивости для нелинейной системы является отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения линеаризованной системы, т.е. все корни характеристического уравнения должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Если среди корней характеристического уравнения найдется хотя бы один с положительной вещественной частью, то система неустойчива.

Если среди корней найдется хотя бы один нулевой корень, то система может быть как неустойчивой, так и устойчивой (не асимптотически). В этом случае устойчивость определяется путем анализа исходных данных (нелинейных) уравнений системы с помощью второго метода Ляпунова.

Корни характеристического уравнения, представляющего собой алгебраическое уравнение, могут быть определены для уравнений второй, третьей и четвертой степеней через коэффициенты при помощи радикалов. Для определения корней уравнений пятой, шестой и других, более высоких степеней используются приближенные методы вычисления (графические, схема Горнера, метод деления многочленов, построения Лилла, способ Лагранжа, метод Лобачевского и др.).

Всякое алгебраическое уравнение степени, не превышающей 4, решается в радикалах. Нильс Хенрик Абель, норвежец, в 1826 г. доказал, что решение уравнения 5 и более степеней невозможно. Эварист Галуа, француз, в 1830 г. получил полное решение задачи о том, при каких условиях алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах.

Задача 7.1. Исследовать устойчивость замкнутой системы стабилизации, характеристическое уравнение, которое имеет вид

$$0{,}016\ s^3 + 2{,}231\ s^2 + 1{,}2\ s + 50 = 0\ .$$

Пожалуйста, исследуйте!

2. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ГУРВИЦА

Критерий устойчивости немецкого математика А. Гурвица (1895 г.) относится к алгебраическим критериям устойчивости. Исходным для критерия является характеристическое уравнение линеаризованной системы управления:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0 = 0 ,$$

на основании которого составляется квадратная матрица Гурвица – Γ по следующему правилу:

- размер квадратной матрицы определяется порядком n;
- по главной диагонали матрицы с левого верхнего угла в правый нижний записываются, начиная с a_{n-1}, коэффициенты характеристического уравнения;
- столбцы матрицы вверх от диагонали дополняются коэффициентами с убывающими индексами;
- столбцы матрицы вниз по диагонали дополняются коэффициентами с возрастающими индексами.

Для общего вида характеристического уравнения матрица представима следующим образом:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & ... & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_2 & a_0 \end{bmatrix} .$$

О

Для того, чтобы линеаризованная система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $a_n > 0$ все определители матрицы Γ, вида $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$, представляющие собой диагональные определители квадратной матрицы Γ, были положительны.

Задача 7.2 Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$0,3s^2 + s + 4,3 = 0 .$$

Пожалуйста, оцените устойчивость системы!

Для исследования линейных систем управления высокого порядка можно использовать алгебраический критерий Льенара–Шипара: для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы при положительности коэффициентов характеристического уравнения были положительными определители нечетного порядка матрицы $\boldsymbol{\Gamma}$. Таким образом, критерий Льенара–Шипара уменьшает наполовину число условий для определения устойчивости линейной системы управления.

Критерий устойчивости Гурвица позволяет определить условия нахождения системы управления на границе устойчивости. Система будет находиться на границе устойчивости, если при положительности всех $\boldsymbol{n-1}$ определителей последний определитель будет равен нулю:

$$\Delta_n = 0 .$$

Из этого условия следует:

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0 ,$$

что возможно при $a_n = 0$ или $\Delta_{n-1} = 0$. Условие $a_n = 0$ соответствует апериодической границе устойчивости, а условие $\Delta_{n-1} = 0$ отвечает нахождению системы на колебательной границе устойчивости.

3. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

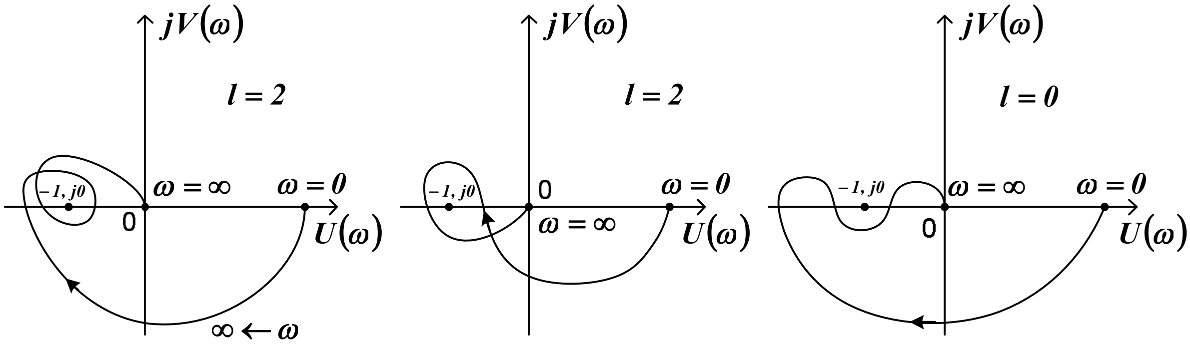
В 1932 году американский учёный Найквист предложил критерий исследования устойчивости усилителей с единичной отрицательной обратной связью. Критерий Найквиста использует АФЧХ разомкнутой системы, по характеру поведения которой на комплексной плоскости, судят о характере устойчивости замкнутой системы. Преимущество критерия Найквиста по сравнению с другими критериями заключается в том, что АФЧХ разомкнутой системы может быть получена, как экспериментальным путём, так и аналитическим.

Критерий Найквиста формулируется следующим образом:

O

Замкнутая система управления устойчива, если при изменении ω *от* 0 *до* ∞ *АФЧХ разомкнутой системы [годограф* $W(j\omega)$*] охватывает* $l/2$ *раз точку с координатами* $(-1, j0)$ *в положительном направлении, где* l *– число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.*

На рисунках приведены примеры годографов $W(j\omega)$ для различных, наиболее характерных случаев.



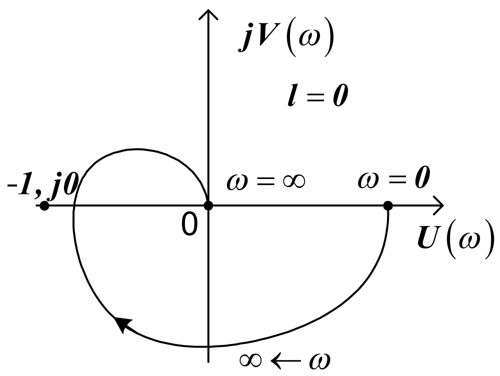
а) б) в)

На рис. а показан годограф $W(j\omega)$ разомкнутой системы, имеющей два корня в правой полуплоскости. Годограф охватывает один раз в положительном направлении точку $(-1, j0)$, следовательно, система в замкнутом состоянии будет устойчива, АФЧХ разомкнутой системы на рис. б охватывает один раз точку с координатами $(-1, j0)$ в отрицательном направлении, поэтому система в разомкнутом состоянии не будет устойчивой. АФЧХ разомкнутой устойчивой системы на рис. в не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$, что свидетельствует об устойчивости системы в замкнутом состоянии.

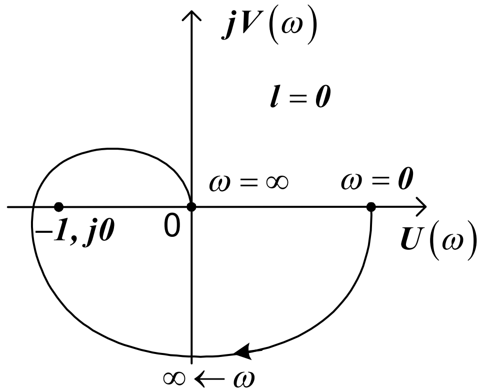
Частным случаем критерия устойчивости Найквиста является случай устойчивой в разомкнутом состоянии системы, т.е. когда $l = 0$. При этом критерий формулируется следующим образом:

Система управления будет устойчива в замкнутом состоянии, если годограф $W(j\omega)$ устойчивой разомкнутой системы при изменении частоты ω от 0 до ∞ не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

На рисунках приведены примеры устойчивости различных систем управления. На рис. г АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, j0)$, что свидетельствует об устойчивости системы в замкнутом состоянии. АФЧХ на рис. д охватывает точку $(-1, j0)$, следовательно, система в замкнутом состоянии будет не устойчива.



г)



д)

Пример 7.1 Определить устойчивость замкнутой системы стабилизации угловой скорости электродвигателя с помощью передаточной функции разомкнутой системы, описывающей процессы вблизи рабочей точки:

$$W(s) = \frac{\Delta U_{ТГ}(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\kappa_У \kappa_Д \kappa_{ТГ}}{T_Э T_{ЭМ} s^2 + T_{ЭМ} s + 1} = \frac{3,15}{0,01s^2 + 0,2s + 1}.$$

Здесь $\Delta U_{ТГ}(s)$ – изображение по Лапласу приращения выходного напряжения тахогенератора; $\Delta U(s)$ – изображение по Лапласу приращения входного напряжения; $\kappa_У$ – коэффициент усиления усилителя мощности; $\kappa_Д$ – коэффициент преобразования электродвигателя; $\kappa_{ТГ}$ – коэффициент преобразования тахогенератора; $T_Э$ – электромагнитная и $T_{ЭМ}$ – электромеханическая постоянные времени электродвигателя.

Характеристическое уравнение разомкнутой системы

$$0,01s^2 + 0,2s + 1 = 0$$

будет иметь два вещественных отрицательных корня:

$$s_1 = s_2 = -10.$$

Следовательно, разомкнутая система устойчива и поэтому $l = 0.$

Для построения АФЧХ разомкнутой системы определим вещественную – $U(\omega)$ и мнимую – $V(\omega)$ характеристики:

$$W(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{\kappa_У \kappa_Д \kappa_{ТГ}}{-T_Э T_{ЭМ}\omega^2 + j\omega T_{ЭМ} + 1} =$$

$$= \frac{\kappa_У \kappa_Д \kappa_{ТГ}[(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2) - j\omega T_{ЭМ}]}{[(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2) + j\omega T_{ЭМ}]\cdot[(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2) - j\omega T_{ЭМ}]} =$$

$$= \frac{\kappa_У \kappa_Д \kappa_{ТГ}(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2)}{(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2)^2 + \omega^2 T_{ЭМ}^2} - j\frac{\kappa_У \kappa_Д \kappa_{ТГ}\omega T_{ЭМ}}{(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2)^2 + \omega^2 T_{ЭМ}^2};$$

$$U(\omega) = \frac{\kappa_У \kappa_Д \kappa_{ТГ}(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2)}{(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2)^2 + \omega^2 T_{ЭМ}^2} = \frac{3,15(1 - 0,01\omega^2)}{(1 - 0,01\omega^2)^2 + 0,04\omega^2};$$

$$V(\omega) = -\frac{\kappa_У \kappa_Д \kappa_{ТГ}\omega T_{ЭМ}}{(1 - T_Э T_{ЭМ}\omega^2)^2 + \omega^2 T_{ЭМ}^2} = -\frac{0,63\omega}{(1 - 0,01\omega^2) + 0,04\omega^2}.$$

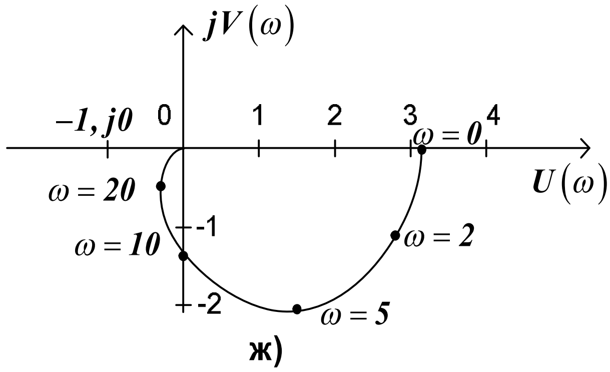
Результаты вычислений вещественной и мнимой характеристик сведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

$\omega,\ 1/c$	0	2	5	10	15	20	30	40
$U(\omega)$	3,15	2,49	1,51	0	-0,37	0,38	-0,25	-0,16
$V(\omega)$	0	-1,16	-2,01	-1,57	-0,89	-0,5	-0,19	-0,002

Полученные данные позволяют построить АФЧХ разомкнутой системы (рис. ж). Согласно критерию устойчивости Найквиста, для устойчивой в разомкнутом состоянии системы годограф $W(j\omega)$ не должен охватывать точку с координатами $(-1, j0)$. Построенный годограф не охватывает точку $(-1, j0)$, следовательно, система стабилизации угловой скорости электродвигателя в замкнутом состоянии будет устойчива.

Критерий Найквиста получил также распространение при определении устойчивости систем управления по логарифмическим частотным характеристикам. АФЧХ разомкнутой системы может быть представлена в такой форме: $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$,

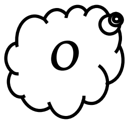


ж)

при этом она полностью определяется парой таких характеристик $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ или аналогичных характеристик.

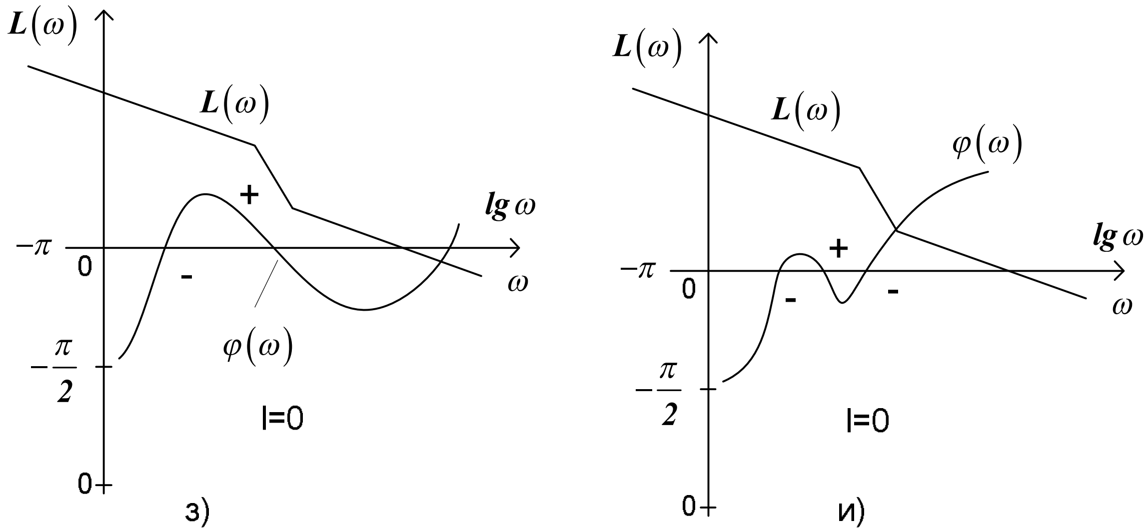
$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) \text{ и } \varphi(\omega).$$

Очевидно, что точкам пересечения годографа $W(j\omega)$ с отрезком отрицательной вещественной полуоси $(-\infty;-1)$ соответствуют точки, для которых $L(\omega)=20\lg|W(j\omega)|>0$, $\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=-\pi,-3\pi,...$. Принято точки пересечения характеристики $\varphi(\omega)$, с прямыми $-\pi,-3\pi$, -5π … снизу вверх, называть отрицательными переходами, а сверху вниз – положительными переходами логарифмической фазовой частотной характеристики. Тогда критерий устойчивости Найквиста формулируется следующим образом:



Замкнутая система автоматического управления устойчива, если для $L(\omega)>0$ разность между положительными и отрицательными переходами АФЧХ равна $l/2$, где l – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, расположенных в правой полуплоскости.

В частном случае, когда $l=0$ (система устойчива или нейтральна в разомкнутом состоянии), замкнутая система будет устойчива, если для $L(\omega)>0$ разность между положительными и отрицательными переходами равна нулю. На рис. з, и приведены характерные расположения логарифмических характеристик для устойчивой и неустойчивой в замкнутом состоянии систем.



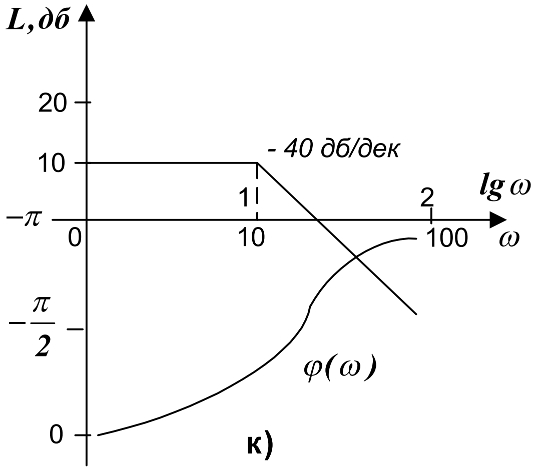
Пример 7.2 Определим устойчивость замкнутой системы стабилизации угловой скорости электродвигателя (***Пример 7.1***) с помощью логарифмического критерия Найквиста. Из решения характеристического уравнения разомкнутой системы следует, что $s_1=s_2=-10$, т.е. число корней в правой полуплоскости $l=0$. Для построения логарифмической амплитудной частотной характеристики передаточную функцию разомкнутой системы представим в виде:

$$W(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{3,15}{(0,1j\omega+1)(0,1j\omega+1)}.$$

Частота сопряжения $\omega_c = 10\ {}^{1}\!/_{c}$. Точку пересечения $L(\omega)$ с осью ординат определим следующим образом: $20\lg(3,15) = 9,97$.

Фазовая частотная характеристика системы строится по уравнению

$$\varphi(\omega) = -2arctg(0,1\omega).$$



к)

Результат построения логарифмических характеристик представлен на рис. к. Из рисунка видно, что для $L(\omega) > 0$ фазовая частотная характеристика не пересекает значение $-\pi$, следовательно, согласно логарифмическому критерию, замкнутая система стабилизации будет устойчива.

Академик В.А. Стеклов о А.М. Ляпунове	:	*«Все из ряда вон выходящие силы свои он отдавал на беззаветное служение науке, ею одной жил, в ней одной видел смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества и сама жизнь для него ничего не стоит»*