Материал к лекции можно просмотреть и скачать на сайте кафедры:
http://k301.info в разделе Дисциплины / Теория автоматического управления

Специальности:	• Авионика • Компьютеризованные системы управления и автоматики • Системы аэронавигационного обслуживания
Дисциплина:	Теория автоматического управления
Курс, семестр, уч. год:	4, весенний, 2018/2019
Кафедра:	301 – СУЛА
Руководитель обучения:	Профессор, д.т.н. Кулик Анатолий Степанович

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛЕКЦИИ № 2

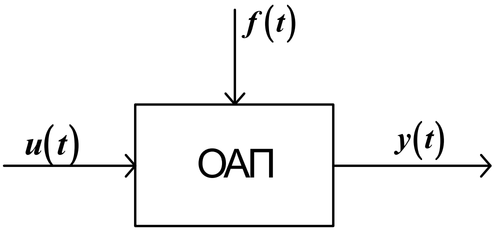
ТЕМА: ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ

Всяк своего счастья кузнец

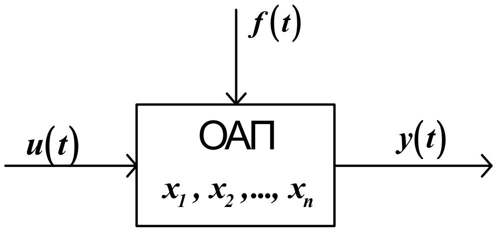
I. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

ФОРМЫ ОПИСАНИЯ:

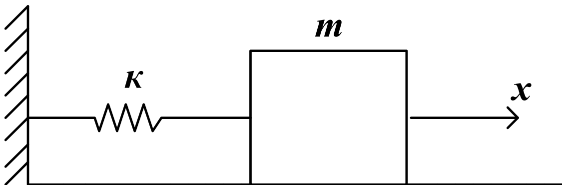
«Вход - выход»



в пространстве состояний



Сформируем уравнения движения для простейшей механической системы без учёта трения. Кинетическая энергия движущегося тела с массой m равна



$$W_к = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 .$$

Идеализация! Что еще не учитывается?

Потенциальная энергия пружины

$$W_п = \int_0^x к\, x\, dx = \frac{1}{2} к\, x^2 ,$$

где $к$ – коэффициент жесткости пружины.

Применяя второй закон Ньютона, запишем уравнения движения тела

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_i ; \quad m\ddot{x} + кx = 0.$$

Дифференцируя выражение для $W_к$ по $\dot{x}$ получим

$$\frac{\partial W_к}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} .$$

Продифференцировав полученное выражение по времени находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_к}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} .$$

Взяв частую производную по x для формулы потенциальной энергии, получим следующее

$$\frac{\partial W_п}{\partial x} = \kappa x .$$

Просуммировав два последних выражения получаем такое уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_к}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial W_п}{\partial x} = 0 .$$

Полученное уравнение называется в механике уравнением движения Лагранжа для системы без потерь. Переменная x – называется обобщенной координатой. Количество обобщенных координат равно числу степеней свободы механической системы.

Ри

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) – французский математик и механик. Сам изучал математику. Труды: вариационное исчисление, ввел обобщенные координаты и придал уравнениям движения форму, названную его именем, теория чисел, интерполяция и др.

Понятие вектора используется в математике, физике, механике, ТАУ и других технических науках. Типичными примерами векторных величин в физике являются: сила, момент силы, скорость и ускорение.

Вектор всегда привязан к определенной системе координат и характеризуется направлением и модулем. Для декартовой системы координат можно записать

$$x = (x_1, x_2),$$

подразумевая под x вектор, выходящий из начала координат с направлением в точку с координатами (x_1, x_2). Числа x_1 и x_2 называются координатами вектора относительно координатных осей.

Ом

Вектор – это упорядоченный набор чисел

В общем случае вектор может иметь n компонент, которые можно рассматривать как упорядоченный набор n чисел. Таким образом, n - компонентный вектор x есть упорядоченный набор n чисел, который можно записать в виде матрицы – столбца размером $n \times 1$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Вектор, имеющий n компонент, называют также n - мерным вектором.

В современной ТАУ используют наряду с понятием вектор понятие вектор состояния. Это

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Ом

Вектор состояния – это упорядоченный набор минимального числа переменных для однозначного описания поведения объекта исследования.

Векторы состояний представляют в соответствующих векторных пространствах.

Ом

Векторное пространство есть множество векторов, замкнутых относительно определенных в нём операций сложения и умножения на скаляр.

Это определение означает, что если $x(t)$ и $y(t)$ – два вектора в векторном пространстве $\mathbf{V}$, то их сумма $x(t)+y(t)$ и результат умножение на скаляр c, т.е. векторы $c\,x(t)$ и $c\,y(t)$, принадлежат той же самой совокупности векторов. Векторное пространство $\mathbf{V}$, включающее все n - мерные векторы, называют n - мерным векторным пространством и обозначают символом $\mathbf{V}_n$.

Векторное пространство с вещественным скалярным произведением называют *<u>евклидовым пространством</u>* и обозначают символом $\mathbf{E_n}$.

Евклид – древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Главная работа «НАЧАЛА».

Скалярное произведение двух векторов $x(t)$ и $y(t)$ – числовая функция двух векторов. Эта функция записывается символически в виде $\left(x(t),\, y(t)\right)$ или $x^T(t)\, y(t)$ (где T– символ транспортирования) и записывается соотношением

$$\left(x(t),\, y(t)\right) = x^T(t)\; y(t) = \sum_{\kappa=1}^{n} x_\kappa\, y_\kappa \,.$$

Расстояние между векторами – ***мера***!

Важность этой функции следует из соотношения

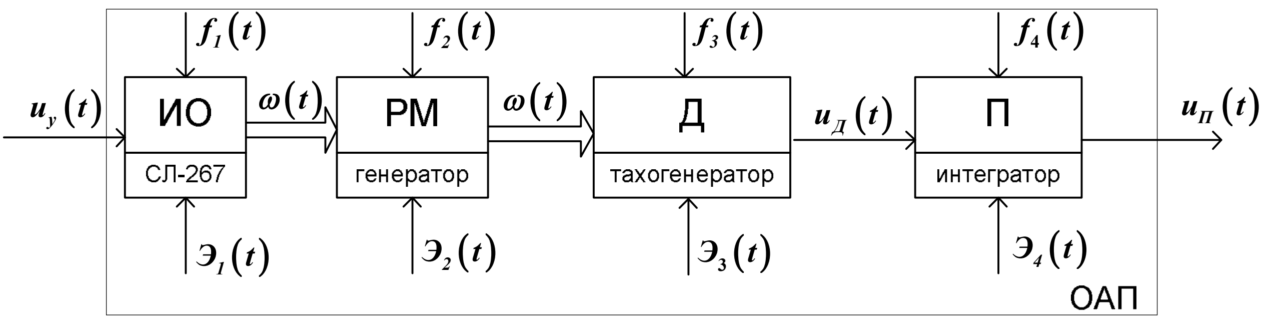
$$x^T(t)\; x(t) = \sum_{\kappa=1}^{n} x_\kappa^{\,2} \;,$$

В евклидовом пространстве введена ***мера***!

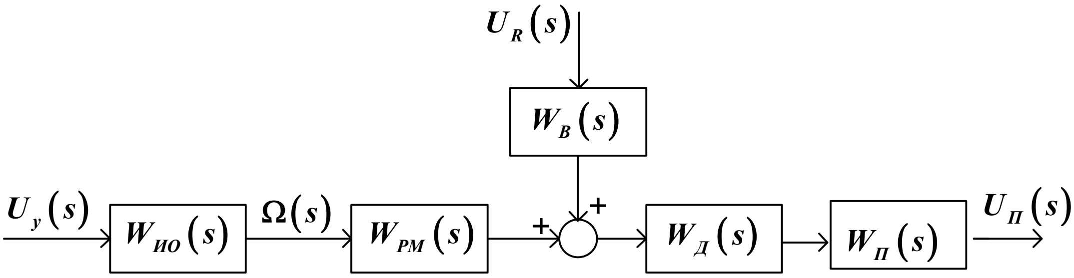
представляющего ***длину вектора – мера.***

II. ОПИСАНИЕ ОАП В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

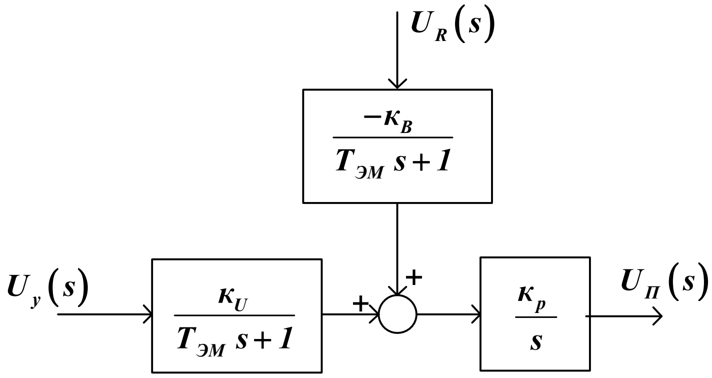
Рассмотрим следующую функциональную схему ОАП



После обработки исходных данных (каких?) можно получить линейную аппроксимацию реальных процессов функционирования ОАП в форме структурной схемы общего вида



Раскрыв передаточные функции элементов и сделав соответствующие структурные преобразования, получим структурную схему в конструктивном виде



Передаточная функция ОАП по управляющему воздействию будет такова:

$$W_U(s)=\frac{U_П(s)}{U_y(s)}=\frac{\kappa_U\,\kappa_P}{s\left(T_{ЭМ}\,s+1\right)}=\frac{\kappa_U{}'}{s\left(T_{ЭМ}\,s+1\right)},\ \text{где}\ \kappa_U{}'=\kappa_U\kappa_P\,.$$

А по возмущающему воздействию

$$W_B(s)=\frac{U_П(s)}{U_R(s)}=\frac{-\kappa_B\,\kappa_P}{s\left(T_{ЭМ}\,s+1\right)}=\frac{-\kappa_B{}'}{s\left(T_{ЭМ}\,s+1\right)},\ \text{где}\ \kappa_B{}'=\kappa_B\kappa_P\,.$$

Для перехода к описанию в пространстве состояний преобразуем $W_U(s)$ в соответствующее линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее такой вид

$$T_{ЭМ}\,\frac{d^2u_П(t)}{dt^2}+\frac{du_П(t)}{dt}=\kappa_U{}'\,u_y(t);\quad u_П(t_0)\equiv 0,$$

разделив обе части на $T_{ЭМ}$ и разрешив уравнение относительно старшей производной получим:

$$\frac{d^2u_П(t)}{dt^2}=-\frac{1}{T_{ЭМ}}\,\frac{du_П(t)}{dt}+\frac{\kappa_U{}'}{T_{ЭМ}}u_y(t);\quad u_П(t_0)\equiv 0.$$

Введем следующую переменную состояния ОАП: $x_1(t)=u_П(t)$, тогда

$$\left\{\begin{aligned}&\dot{x}_1(t)=x_2(t); && x_1(t_0)\equiv 0;\\ &\dot{x}_2(t)=-\frac{1}{T_{ЭМ}}x_2(t)+\frac{\kappa_U{}'}{T_{ЭМ}}u_y(t); && x_1(t_0)\equiv 0.\end{aligned}\right.\qquad \left\{\ \text{уравнения в форме Коши }(*)\right.$$

Если использовать такие обозначения

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix};\quad x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix};\quad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{\kappa_U{}'}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix};\quad c^T=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},$$

тогда систему $(*)$ можно представить в развёрнутой векторно-матричной форме следующего вида

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{\kappa_U{}'}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix}u_y(t);$$

$$u_П(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix};\qquad \begin{bmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

или в общей форме с учётом введенных обозначений

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A\ x(t)+b\ u_y(t);\\ u_П(t)=c^T x(t);\quad x(t_0)\equiv 0.\end{cases}\qquad (**)$$

Аналогичным образом можно перейти от передаточной функции $W_B(s)$ к описанию в пространстве состояний. *Сделайте, пожалуйста, этот переход!*

В результате должны получить такую векторно-матричную систему уравнений

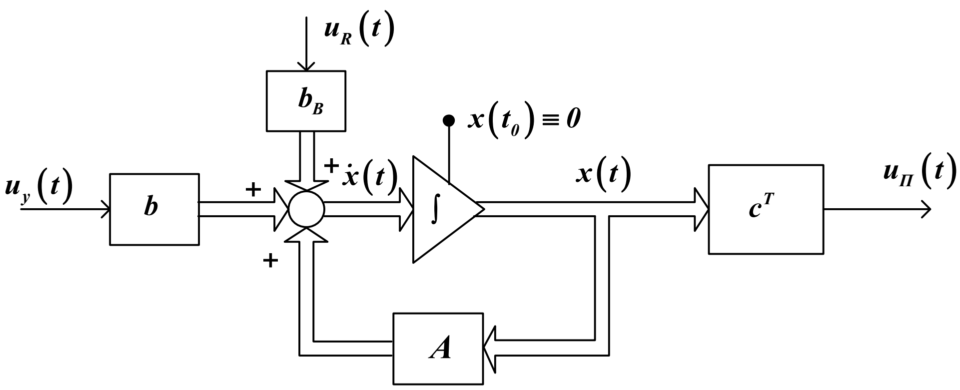
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{\kappa_B{}'}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix}u_R(t);$$

$$u_П(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix};\qquad \begin{bmatrix}x_1(t_0)\\ x_2(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Или в общей форме

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A\ x(t)+b_B\ u_R(t);\\ u_П(t)=c^T x(t);\quad x(t_0)=0.\end{cases}\qquad (***)$$

Полученные системы уравнений можно представить графически с помощью блок-схемы



Найдём передаточную функцию ОАП, представленного в пространстве состояний. Применив к системе уравнений $(**)$ преобразование Лапласа получим

$$\begin{aligned} &s\,X(s) = A\;X(s) + b\,U_y(s);\\ &U_П(s) = c^T X(s). \end{aligned}$$

Разрешив уравнение относительно изображения выходного сигнала имеем

$$U_П(s) = c^T\left(s\,I - A\right)^{-1} bU_y(s),$$

следовательно,

$$W_U(s) = \frac{U_П(s)}{U_y(s)} = c^T\left(s\;I - A\right)^{-1} b = \left|\begin{array}{c}\textit{пожалуйста, получите}\\ \textit{выражение передаточной функции!}\end{array}\right|$$

$$\begin{bmatrix} s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} s & -1\\ 0 & s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix}}^{K};\quad det\begin{bmatrix} s & -1\\ 0 & s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix} = s\left(s+\frac{1}{T_{ЭМ}}\right);$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}} & 0\\ 1 & s\end{bmatrix};\quad \tilde{K}^T = \begin{bmatrix} s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}} & 1\\ 0 & s\end{bmatrix},$$

здесь $\tilde{K}$ - присоединенная матрица;

$$K^{-1} = \frac{1}{|K|}\begin{bmatrix} s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}} & 1\\ 0 & s\end{bmatrix} = \frac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\right)}\begin{bmatrix} s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}} & 1\\ 0 & s\end{bmatrix};$$

$$\frac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\right)}\begin{bmatrix} 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}} & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\ \dfrac{K'_U}{T_{ЭМ}}\end{bmatrix} = \frac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\right)}\cdot\frac{k'_U}{T} = \frac{k'_U}{s\left(T_{ЭМ}s+1\right)} = W_U(s).$$

В самом общем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\\ y(t) = Cx(t) + Du(t);\;\; x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Здесь:

$x(t)$ – n-мерный вектор состояния;

$u(t)$ – r-мерный вектор управления;

$y(t)$ – m-мерный вектор выхода;

$A - (n\times n)$ – матрица динамики;

$B - (n\times r)$ – матрица входа;

$C - (m\times n)$ – матрица выхода;

$D - (m\times r)$ – матрица прямой связи.

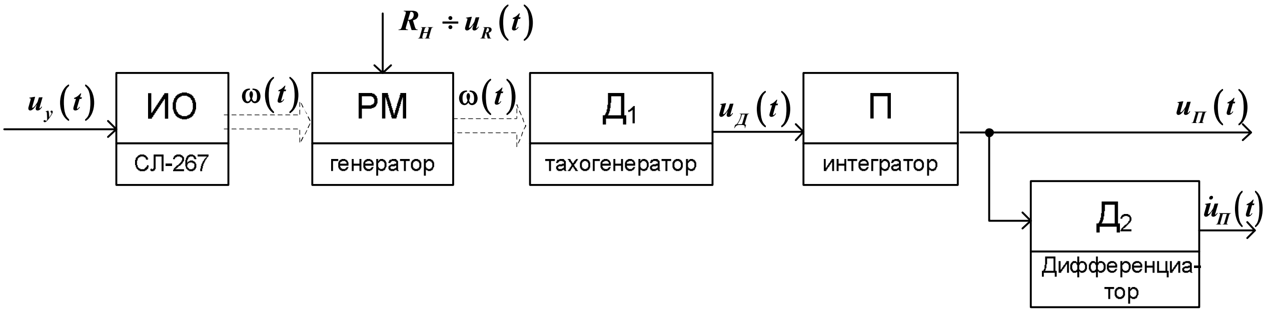
Легко найти, а потерять и того легче

ТЕМА: АНАЛИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ОАП

Кто правдою живет, тот добро наживет

I. ОБЪЕКТ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

Представим функциональную схему ОАП в таком виде



Существуют три принципиальные возможности (взаимосвязанные или нет?) исследования функциональных свойств ОАП:

1. Экспериментальное исследование.
2. Аналитическое исследование.
3. Машинное исследование.

Математическая модель в линейном пространстве состояний может быть описана такими векторно-матричными уравнениями в общем виде

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t);$$
$$y(t) = C\,x(t);\ \ x(t_0) = x_0,$$

где $x(t)$ – 2-мерный вектор состояния; $u(t)$ – 2-мерный вектор входных воздействий; $y(t)$ – 2-мерный вектор выхода; A – (2x2)-матрица динамики объекта; B – (2x2)-матрица входа объекта; C – (2x2)-матрица выхода объекта.

В конструктивной, развернутой векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{K'_U}{T_{ЭМ}} & -\dfrac{K'_B}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y(t) \\ u_R(t) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_П(t) \\ \dot{u}_П(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

С помощью этой математической формы можно произвести анализ таких фундаментальных функциональных свойств как ***управляемость, наблюдаемость, устойчивость*** и ***диагностируемость.***

II. УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОАП

Понятие управляемости характеризует возможность перевода ОАП посредством допустимого управления из одного состояния в другое за конечное время.

Аналитический инструмент исследования свойств управляемости объектов был предложен американским математиком Ричардом Калманом в 1961 году в форме критерия следующего вида

$$rang \underbrace{\left[B, AB, \dots, A^{n-1}B \right]}_{R} = rang\, R = n\ .$$

$Р_м$

Ранг матрицы – наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы.

Минор к-го порядка матрицы – определитель матрицы, составленный из элементов данной матрицы, стоящих на пересечении произвольно выделенных ее к-строк и к-столбцов с сохранением их порядка.

Итак, необходимое и достаточное условие управляемости по Калману заключается в том, что $rang\, R = n$. В этом математическая суть критерия управляемости.

Проанализируем управляемость стендового варианта ОАП, в котором одно управляющее воздействие $u_y(t)$, поэтому $B \to b$ и матрица R будет формироваться с помощью матриц b и A. В результате получим

$$rang\left[b,\ A b\right] = rang\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{K'_U}{T_{ЭМ}} \\ \dfrac{K'_U}{T_{ЭМ}} & \dfrac{K'_U}{T^2_{ЭМ}} \end{bmatrix}}_{R};\ \left|R\right| = \left(\frac{K'_U}{T_{ЭМ}}\right)^2 \neq 0 \ \rightarrow \ rang\, R = 2.$$

Следовательно, лабораторный ОАП будет полностью управляем. Что означает возможность перевода ОАП из состояния $u_П\left(t_0\right)$ в $u_П\left(t_1\right)$ с помощью сигнала управления $u_y\left(t\right)$ за конечное время $\Delta t = t_1 - t_0$.

Если $rang\, R \neq n$, то это означает: ОАП неуправляем. Неуправляемость свидетельствует о неправильном конструировании ОАП, а именно, таком выборе управляющих воздействий, которые не влияют или частично влияют на координаты вектора состояния $x\left(t\right)$, т.е. не могут обеспечить перевода объекта из одного состояния $x\left(t_0\right)$ в другое $x\left(t_1\right)$ за конечное время $\Delta t = t_1 - t_0$. Использование критерия Р. Калмана позволяет найти из всех возможных управляющих воздействий для ОАП именно те, которые обеспечат полную управляемость, т.е. выполнение критерия $rang\, R = n$!

В тех случаях, когда управляемость не удается оценить аналитически, прибегать к экспериментальному или численному эмпирическому исследованию свойства управляемости.

III. НАБЛЮДАЕМОСТЬ ОАП

Понятие наблюдаемости характеризует возможность непосредственно или косвенно по выходному вектору ОАП определить его вектор состояния.

Р. Калман предложил также аналитический критерий анализа наблюдаемости линеаризуемых объектов, представленных описанием в пространстве состояний. Для критерия используются из векторно-матричных уравнений матрицы A и C, с помощью которых формируется матрица наблюдаемости следующим образом

$$D = \left[C^T, \left(C\,A\right)^T, \ldots, \left(C\,A^{n-1}\right)^T\right].$$

Необходимое и достаточное условие наблюдаемости по Калману заключается в том, что $rang\, D = n$.

В этом математическая суть критерия наблюдаемости.

Проанализируем наблюдаемость стендового варианта ОАП, используя такие матрицы A и C

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сформируем матрицу наблюдаемости D

$$D=\left[C^T \quad (C\ A)^T\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix}.$$

Из этой матрицы можно сформировать три минора следующего вида

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}} \end{vmatrix},$$

каждый из которых отличен от нуля. Следовательно,

$$rang\,D = 2 = dim\,x(t).$$

Это означает, что лабораторный ОАП будет полностью наблюдаем, т.е. все изменения вектора состояния будут отражаться в векторе измерений.

Проанализируем наблюдаемость стендового варианта ОАП, используя такие матрицы A и c^T

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix};\ c^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сформируем матрицу наблюдаемости D

$$D=\left[c \quad \left(c^T\ A\right)^T\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Минор наибольшей размерности этой матрицы имеет такой вид

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и равен $\Delta = I$. Следовательно,

$$rang\,D = 2 = dim\,x(t).$$

Значит, изменения вектора состояния $x(t)$ будут полностью отражаться в выходном сигнале $u_П(t)$.

IV. УСТОЙЧИВОСТЬ ОАП

Вспомним общее определение устойчивости.

О

<u>Устойчивость</u> – это свойство объекта возвращаться в исходное состояние после кратковременного вывода его из этого состояния и прекращения действия возмущения.

Впервые фундаментальные математические результаты по устойчивости движения были получены русским ученым, корифеем в математическом естествознании Александром Михайловичем Ляпуновым. В докторской диссертации им предложены два метода исследования устойчивости нелинейных динамических систем: 1-й метод – для линеаризованного представления систем, а 2-й метод – для автономных нелинейных систем.

$\mathcal{P}_n$

Полезно восстановить в памяти лекции № 6 и № 7 из конспекта лекций по ТАУ в осеннем семестре.

Устойчивость ОАП можно оценивать по его линейной математической модели в форме дифференциального уравнения или передаточной функции путем решения характеристического уравнения и выявления расположения корней уравнения на комплексной плоскости.

Необходимым и достаточным условием устойчивости ОАП по 1-му методу А.М. Ляпунова является расположение корней характеристического уравнения линейной математической модели в левой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Пользуясь описанием ОАП в пространстве состояния можно исследовать свойство устойчивости. С этой целью используется квадратная матрица следующего вида

$$\left[s\,\boldsymbol{I} - A \right], \;\; \boldsymbol{dim}\left[s\,\boldsymbol{I} - A \right] = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} \,.$$

Для этой матрицы вычисляется определитель

$$\boldsymbol{det}\left[s\,\boldsymbol{I} - A \right],$$

представляющий собой ни что иное, как полином n-го порядка следующего вида

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0 \,.$$

Приравняв полином нулю, получим характеристическое уравнение ОАП

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0 = 0 \,.$$

Разрешив это уравнение относительно переменной s, получим n значений: $s_1, s_2, \dots, s_n$ – корней характеристического уравнения.

Расположив эти корни на комплексной плоскости корней, можно установить такие свойства ОАП: устойчив, неустойчив, находится на границе устойчивости.

Рассмотрим характер устойчивости стендового варианта ОАП, используя матрицу A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix}.$$

Сформируем квадратную 2×2 матрицу:

$$\left[s\,I - A \right] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \dfrac{1}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix}.$$

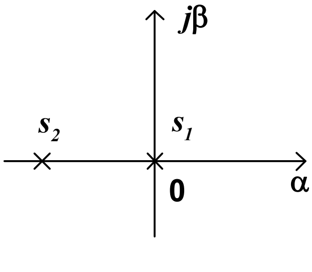
Определитель этой матрицы

$$det\left[s\,I - A \right] = s\left(s + \frac{1}{T_{ЭМ}} \right).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$s\left(s + \frac{1}{T_{ЭМ}} \right) = 0 .$$

Корни характеристического уравнения $s_1 = 0,\ s_2 = -\dfrac{1}{T_{ЭМ}}$.



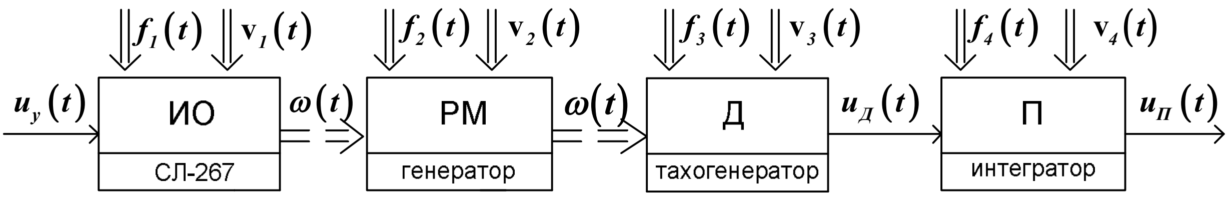
Расположив корни на комплексной плоскости корней, устанавливаем, что ОАП находится на апериодической границе устойчивости.

V. ДИАГНОСТИРУЕМОСТЬ ОАП

О

> Диагностируемость ОАП характеризует возможность получения диагноза о причинах неработоспособности.

Представим функциональную схему ОАП в таком виде



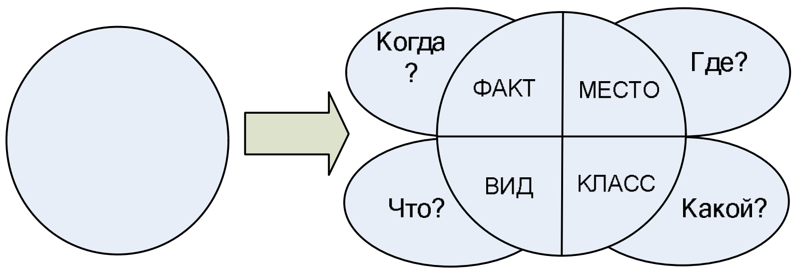
Здесь $f_i(t),\ i=\overline{1,4}$ - возмущающие воздействия: помехи, искажения, неточности и т.д.;

$v_i(t),\ i=\overline{1,4}$ - виды физических отказов: поломки, дефекты, обрывы и т.д.

$f_i(t)$, $v_i(t)$ $\longrightarrow$ $d_i(t)$ - дестабилизирующие воздействия!

- Дестабилизирующие воздействия – это воздействия, изменяющие работоспособность ОАП неопределенным образом.
- Дестабилизирующее воздействие – это неопределенное событие.

ДЕСТАБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ



НЕОПРЕДЕЛЁННОЕ СОБЫТИЕ *ОПРЕДЕЛЁННОЕ СОБЫТИЕ*

- Чтобы из неопределенного события, вызванного дестабилизирующим воздействием $d_i(t)$, получить конкретные сведения о его причинах, необходимо сформировать прямые признаки. Прямые признаки – это признаки факта, места, класса и вида.
- Прямые признаки недоступны измерению, поэтому формируют косвенные признаки. Косвенные признаки – это отклонения доступных измерению сигналов.

Понятие диагностируемости характеризует возможность установления в ОАП наличия прямого признака любого дестабилизирующего воздействия из заданного множества по косвенным признакам за конечное время.

Для формализации связей прямых признаков с косвенными требуется каждому дестабилизирующему воздействию $d_i(t)$ поставить в соответствие параметр $\lambda_j(t)$, характеризующий влияние этого воздействия на косвенные признаки. Тогда отклонение $\Delta\lambda_j(t) = \lambda_j(t) - \lambda_{jн}(t)$, где $\lambda_{jн}(t)$- номинальное значение параметра, будет представлять собой прямой признак.

ОАП, подверженный дестабилизирующим воздействиям, можно описать в пространстве состояний с помощью следующих векторно-матричных уравнений:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(\lambda_j)\tilde{x}(t) + B(\lambda_j)u(t);$$
$$\tilde{y}(t) = C(\lambda_j)\tilde{x}(t);\ \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0.$$

Матрицы уравнений зависят от параметра λ_j. Эту зависимость можно представить таким образом:

$$A(\lambda_j) = A(\lambda_{jн}) + \Delta A(\Delta\lambda_j);\ B(\lambda_j) = B(\lambda_{jн}) + \Delta B(\Delta\lambda_j);\ C(\lambda_j) = C(\lambda_{jн}) + \Delta C(\Delta\lambda_j).$$

Тогда приращения матриц, вызванные наличием прямого признака, представим так:

$$\Delta A(\Delta\lambda_j) = \mathcal{A}_{\lambda j}\Delta\lambda_j;\ \Delta B(\Delta\lambda_j) = \mathcal{B}_{\lambda j}\Delta\lambda_j; \Delta C(\Delta\lambda_j) = \mathcal{C}_{\lambda j}\Delta\lambda_j,$$

$$где\ \mathcal{A}_{\lambda j} = \frac{dA(\lambda_j)}{d\lambda_j};\ \mathcal{B}_{\lambda j} = \frac{dB(\lambda_j)}{d\lambda_j}\ и\ \mathcal{C}_{\lambda j} = \frac{dC(\lambda_j)}{d\lambda_j};\ \Delta\lambda_j >> \Delta\lambda_j^2.$$

Это позволяет сформировать такую составную матрицу

$$N_{\lambda j} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{\lambda j} & \mathcal{B}_{\lambda j} \\ \mathcal{C}_{\lambda j} & 0 \end{bmatrix}$$

и составной вектор

$$w_{\lambda j}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix},\ где\ \hat{x}(t)\text{- вектор состояния эталонной модели ОАП.}$$

Критерий структурной диагностируемости. Объект автоматического позиционирования диагностируем в малом по косвенным признакам $\Delta y(t)$ относительно прямых признаков $\Delta\lambda_j,\ j = \overline{1,q}$, если матрицы $N_{\lambda j},\ j = \overline{1,q}$ линейно-независимы во всех попарных сочетаниях.

Матрицы структурно-диагностируемой ОАП обозначим как $N^*_{\lambda j}$.

Критерий сигнальной диагностируемости. Объект автоматического позиционирования диагностируем в малом по косвенным признакам $\Delta y(t)$ относительно прямых признаков $\Delta\lambda_j,\ j = \overline{1,q}$, если существует $u(t) \in U^r$ такое, что векторы $N^*_{\lambda j}w_{\lambda j}(t)$ линейно-независимы во всех попарных сочетаниях.

Количество сочетаний вычисляют по формуле $C_q^2 = \dfrac{q(q-1)}{2!}$.

Проанализируем диагностируемость стендового варианта ОАП относительно мест отказа в исполнительном органе – параметр $\tilde{k}_U$ и имитаторе редуктора - $\tilde{k}_P$.

Возмущенное движение ОАП в развернутой форме описывается такими уравнениями

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\tilde{k}_U \tilde{k}_P}{T_{ЭМ}} & -\dfrac{k_B \tilde{k}_P}{T_{ЭМ}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_y(t) \\ u_R(t) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_П(t) \\ \dot{\tilde{u}}_П(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t_0) \\ \tilde{x}_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{10} \\ \tilde{x}_{20} \end{bmatrix}.$$

От параметров мест: $\tilde{k}_U$ и $\tilde{k}_P$ зависит только матрица $B\,(\tilde{k}_U, \tilde{k}_P)$.

Поэтому получим две составных матриц $N_{\lambda j}$ такого вида

$$N_{\tilde{k}_U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{k_P}{T_{ЭМ}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad N_{\tilde{k}_P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{k_P}{T_{ЭМ}} & -\dfrac{k_B}{T_{ЭМ}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структуры полученных матриц различны, следовательно, они линейно-независимы и ОАП структурно-диагностируем относительно двух мест дестабилизирующих воздействий.

Сформируем составные векторы

$$w_{k_U}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_P}{T_{ЭМ}} u_y(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad w_{\tilde{k}_P}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_U}{T_{ЭМ}} u_y(t) - \dfrac{k_B}{T_{ЭМ}} u_R(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Линейная независимость этих векторов обеспечивается различным характером изменения воздействий. Например, $u_y(t) = const : u_y(t) = u_{y0} \cdot 1(t);\ u_R(t) = var : u_R(t) = u_{R0} \sin\omega t.$

Итак, ОАП полностью диагностируем относительно двух мест дестабилизирующих воздействий на И0 и ИР, что означает принципиальную возможность найти эти места по косвенным признакам $\Delta u_П(t)$ и $\Delta\dot{\tilde{u}}_П(t)$, обрабатывая их соответствующим образом.

Свойства управляемости, наблюдаемости, устойчивости и диагностируемости ОАП можно изменить путем соответствующего его проектирования и конструирования.

Рл

За правое дело стой смело!