Материал к лекции можно просмотреть и скачать на сайте кафедры: http://k301.info в разделе Дисциплины / Теория автоматического управления

Специальности :
- Авионика
- Автоматизация и компьютерно-интегрованные технологии
- Авиационный транспорт

Дисциплина: Теория автоматического управления
Курс, семестр, уч. год: 3, весенний, 2018/2019
Кафедра: 301 – СУЛА
Руководитель обучения: Профессор, д.т.н. Кулик Анатолий Степанович

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛЕКЦИИ № 10

ТЕМА: МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

Рл

Голова – всему начало. Где ум, там и толк

I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод корневого годографа – метод расчета линеаризованных замкнутых систем управления по траекториям корней характеристического уравнения системы при изменении какого-либо параметра настройки.

Предложили этот метод независимо друг от друга в 1948 г. К.Ф. Теодорчик (СССР) и В.-Р. Ивэнс (США).

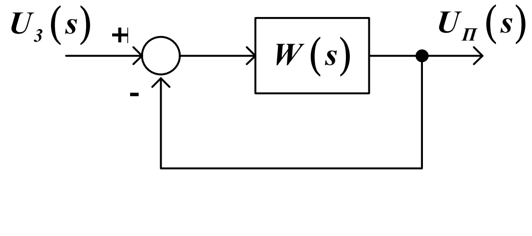
О

Корневым годографом называется геометрическое место корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении параметра от 0 до ∞.

Достоинством метода корневого годографа (траекторий корней) является большая наглядность, простота исследования влияния отдельных параметров на динамику системы, возможность синтеза и оценки ее качества, а также построения кривых переходного процесса и частотных характеристик без применения вспомогательных графиков, номограмм и таблиц.

II. СУТЬ МЕТОДА

Рассмотрим обобщенную структурную схему лабораторной замкнутой САП по



управляющему воздействию, допуская при этом, что $U_R(s) \equiv 0$ и $W_к(s) \equiv 1$. Запишем передаточную функцию замкнутой системы по управляющему воздействию

$$\Phi(s)=\frac{U_n(s)}{U_З(s)}=\frac{W(s)}{1+W(s)}=\frac{\kappa}{T_{ЭМ}\cdot s^2+s+\kappa}.$$

Здесь $\kappa=\kappa_П\cdot\kappa_y\cdot\kappa_U\cdot\kappa_p$ – коэффициент передачи по управляющему воздействию разомкнутой системы; $T_{ЭМ}$ – электромеханическая постоянная времени, с.

При использовании метода корневого годографа обычно один из параметров разомкнутой системы полагают изменяющимся. В нашем случае это может быть $\kappa_П$ или κ_y. Затем определяют аналитические зависимости корней характеристического уравнения от варьируемого параметра. С помощью этих зависимостей строят на комплексной плоскости корней s-кривые, показывающие, как перемещаются (мигрируют) корни характеристического уравнения при изменении варьируемого параметра. Эти кривые называются *корневым годографом* или *траекторией корней*. Далее, исходя из требований к запасам устойчивости и качеству процесса функционирования САП, формируют области возможного расположения корней. Значение варьируемого параметра выбирают из условия желаемого расположения корней характеристического уравнения САП в допустимых областях комплексной плоскости корней.

III ПРИМЕР. Передаточная функция разомкнутой системы позиционирования описывается таким выражением

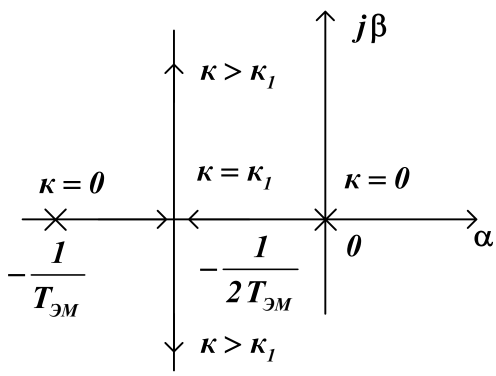
$$W(s)=\frac{U_n(s)}{U_З(s)}=\frac{\kappa}{T_{ЭМ}\cdot s^2+s}.$$

Характеристическому уравнению замкнутой системы

$$T_{ЭМ}\cdot s^2+s+\kappa=0$$

соответствуют такие корни

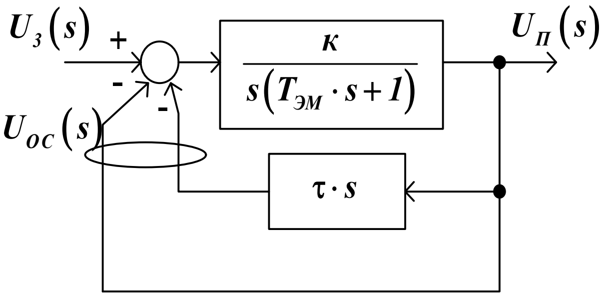
$$s_{1,2}=-\frac{1}{2T_{ЭМ}}\pm\frac{\sqrt{1-4T_{ЭМ}\kappa}}{2T_{ЭМ}}.$$



При $\kappa=0$ имеем $s_1=0,\ s_2=-\frac{1}{T_{ЭМ}}$ и, следовательно, корни характеристического уравнения совпадают с полюсами передаточной функции разомкнутой системы и они обозначаются крестиками, как показано на рисунке. Если $0<\kappa\le\frac{1}{4\,T_{ЭМ}}$, то корни перемещаются по вещественной оси и при $\kappa = \kappa_1 = \dfrac{1}{4\,T_{ЭМ}}$ сливаются в двойной корень в кратной точке. При дальнейшем увеличении κ корни уходят в бесконечность по двум комплексно сопряженным траекториям, параллельным мнимой оси.

Из траектории корней рассматриваемой системы видно, что при любых значениях параметра $\kappa > 0$ система устойчива, поскольку корни характеристического уравнения замкнутой системы располагаются всегда в левой полуплоскости комплексной плоскости корней.

Введем гибкую обратную связь в САП следующим образом:



Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{U_{oc}(s)}{U_З(s)} = \frac{\kappa(\tau\cdot s+1)}{s(T_{ЭМ}\cdot s+1)} =$$

$$= \frac{\kappa\cdot\tau\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)}{s\cdot T_{ЭМ}\left(s+\dfrac{1}{T_{ЭМ}}\right)} = \frac{\kappa'(s+b)}{s(s+a)},$$

где $\kappa' = \dfrac{\kappa\cdot\tau}{T_{ЭМ}}$; $b = \dfrac{1}{\tau}$; $a = \dfrac{1}{T_{ЭМ}}$.

Передаточная функция замкнутой системы:

$$\Phi(s) = \frac{U_{OC}(s)}{U_З(s)} = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{\kappa(\tau s+1)}{s(T_{ЭМ}s+1)+\kappa(\tau s+1)} = \frac{\kappa\tau\left(s+\dfrac{1}{\tau}\right)}{T_{ЭМ}\left(s^2+\left(\dfrac{1+\kappa\tau}{T_{ЭМ}}\right)s+\dfrac{\kappa}{T_{ЭМ}}\right)} =$$

$$= \left|\frac{\kappa\tau}{T_{ЭМ}} = \kappa',\ \frac{1}{\tau} = b,\ \frac{1}{T_{ЭМ}} = a\right| = \frac{\kappa'(s+b)}{s^2+(a+\kappa')s+\kappa a}.$$

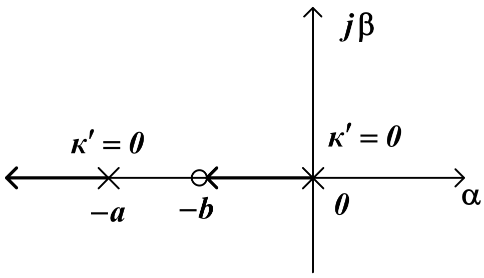
Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$s^2 + (a+\kappa')\ s + \kappa'\cdot b = 0\,.$$

Решив уравнение, получим

$$s_{1,2} = -\frac{a+\kappa'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+\kappa'}{2}\right)^2 - \kappa'\cdot b}\,.$$

При $\kappa' = 0$ имеем $s_1 = 0, s_2 = -a = -\dfrac{1}{T_{ЭМ}}$, т.е. корни совпадают с полюсами передаточной функции $W(s)$. Пусть $a > b$, тогда корни могут быть только вещественными. Следовательно, при увеличении κ' корни будут перемещаться по вещественной оси, причем при $\kappa' \to \infty$ первый корень движется к предельной точке



$-b = -\dfrac{1}{\tau}$, совпадающей с нулем (он обозначается кружком) передаточной функции $W(s)$, а второй корень уходит в бесконечность по отрицательной вещественной оси.

При $a < b$ исследуем дискриминант характеристического уравнения.

$$\left(\frac{a+\kappa'}{2}\right)^2 - \kappa' b = 0; \quad (a+\kappa')^2 - 4\kappa' b = 0;$$

$$a^2 + 2a\kappa' + \kappa'^2 - 4\kappa' b = 0; \quad a^2 + 2a\kappa' - 4\kappa' b + \kappa'^2 = 0;$$

$$\kappa'^2 + 2\kappa'(a - 2b) + a^2 = 0;$$

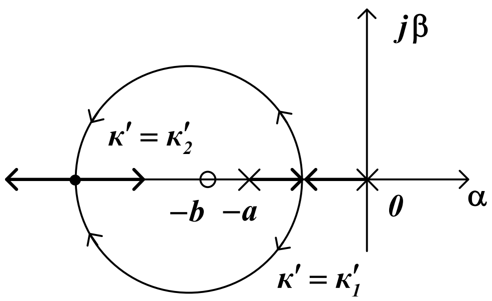
$$\kappa'_{1,2} = -a + 2b \pm \sqrt{(a-2b)^2 - a^2} = -a + 2b \pm \sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2} =$$

$$= -a + 2b \pm \sqrt{-4ab + 4b^2} = -a + 2b \pm 2\sqrt{ab - b^2} =$$

$$= -a + 2b \pm 2b\sqrt{\frac{a}{b} - 1}:$$

$$\kappa'_{1,2} = 2b\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{a}{b}} - a\right).$$

Из полученного выражения следует, что при $\kappa'_1 < \kappa' < \kappa'_2$ корни оказываются комплексно-сопряженными. Таким образом, при $0 \le \kappa' \le \kappa'_1$ корни движутся по вещественной оси до первой кратной точки $(\kappa' = \kappa'_1)$, где они сливаются в один двойной корень. При дальнейшем увеличении κ' пара комплексно-сопряженных корней перемещается по двум полуокружностям до встречи во второй кратной точке $\kappa' = \kappa'_2$. Действительно, при $\kappa'_1 < \kappa' < \kappa'_2$ на основании выражения корней характеристического уравнения можно ввести такие обозначения:



$$\alpha = -\frac{a+\kappa'}{2}, \beta = \sqrt{\kappa' b - \left(\frac{a+\kappa'}{2}\right)^2},$$

следовательно,

$$(\alpha + b)^2 + \beta^2 = \left(-\frac{a+\kappa'}{2} + b\right)^2 + \kappa' b - \left(\frac{a+\kappa'}{2}\right)^2 = b(b-a),$$

а значит траектории корней являются дугами окружности, центр которой находится в предельной точке $-b = -\dfrac{1}{\tau}$, а радиус $r = \sqrt{b(b-a)}$.

При $\kappa' > \kappa'_2$ корни вновь движутся по вещественной оси, причем при $\kappa' \to \infty$ первый корень стремится к определенной точке $-b = -\dfrac{1}{\tau}$, а второй корень уходит в бесконечность.

Пожалуйста, постройте для своих конкретных значений $\kappa, T_{эм}$ и τ *корневой годограф!*

По платью встречают, по уму провожают