

Материал к лекции можно просмотреть и скачать на сайте кафедры:  
<http://k301.info> в разделе Дисциплины / Теория автоматического управления

Специальности :	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Авионика</li> <li>• Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии</li> <li>• Авиационный транспорт</li> </ul>
Дисциплина:	Теория автоматического управления
Курс, семестр, уч. год:	3, весенний, 2018/2019
Кафедра:	301 – СУЛА
Руководитель обучения:	Профессор, д.т.н. Кулик Анатолий Степанович

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛЕКЦИИ № 12

### ТЕМА: НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ



*Одно дело делай, а другое не порть*

#### I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Все существующие и, в том числе, искусственные технические системы **нелинейны**.

Начальный этап изучения реальных систем состоит в построении и исследовании **линейных моделей**, являющихся наиболее простыми из возможных.

Теория линейных систем управления, базирующаяся на линеаризованных уравнениях, является глубоко разработанной областью науки управления. Для *детального и всестороннего* изучения реальных систем линейные модели являются слишком упрощенными, а зачастую и грубыми.

**Теория нелинейных автоматических систем**, базирующаяся на нелинейных уравнениях, представляет собой значительно более *представительную область науки управления*, чем теория линейных систем. Вместе с тем, вследствие трудностей исследования нелинейных моделей, теория нелинейных систем разработана не столь полно, хотя и здесь достигнуты фундаментальные результаты.

**Первая задача нелинейной теории** – задача анализа динамического поведения систем с нелинейностями с целью выявления влияния нелинейностей на качество функционирования систем и поиска путей эффективного использования нелинейных эффектов.

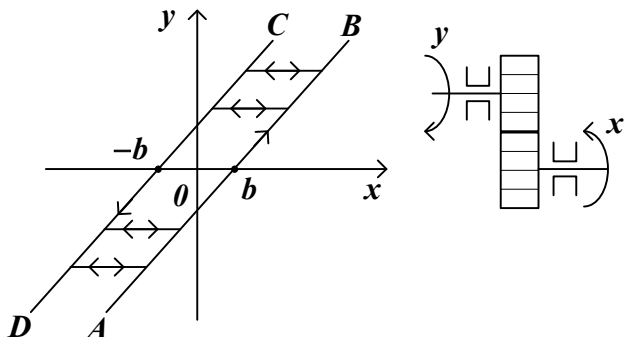
**Вторая задача нелинейной теории** – задача синтеза нелинейных систем, удовлетворяющих предъявляемым к ним требованиям.

При построении нелинейных моделей автоматических систем обычно выделяют несколько функциональных элементов с *существенными нелинейными свойствами*, при этом остальные функциональные элементы, как правило, должны быть линеаризуемыми в заданном диапазоне входных сигналов с требуемой степенью точности.

## II. ТИПИЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Большинство существующих статических (а какие ещё бывают?) нелинейностей можно аппроксимировать следующими типовыми:

### а) гистерезисная петля люфта.



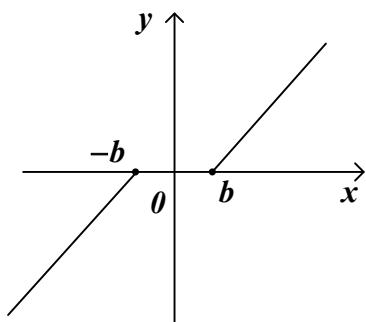
Здесь  $x$  и  $y$  – углы поворота ведущей и ведомой шестерней. При изменении  $x$  величина  $y$  остаётся постоянной, пока не будет выбран зазор (люфт) в зацеплении. Процессу выборки люфта соответствует один из горизонтальных отрезков статической характеристики.

При вращении ведомой шестерни в одном направлении (например, при возрастании  $x$ ) люфт выбран в одну сторону, а при вращении в противоположном направлении – в другую. Поэтому при возрастании  $x$  изображающая точка движется по прямой  $AB$ , а при убывании – по прямой  $CD$ , т.е.

$$\begin{cases} y = \kappa(x - b) & \text{при } \frac{dy}{dt} > 0; \\ y = \kappa(x + b) & \text{при } \frac{dy}{dt} < 0, \end{cases}$$

где  $\kappa$  – коэффициент преобразования;  $b$  – половина ширины люфта. Такая статическая нелинейная характеристика имеет место при наличии люфта в сочленении рычагов, тяг и других механических соединениях.

### б) зона нечувствительности.

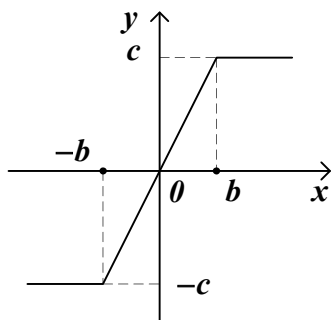


Это типичная нелинейность в системах управления, определяемая таким интервалом изменения входной переменной  $x$ , для которого выходная переменная  $y \equiv 0$ .

Зона нечувствительности имеется у большинства исполнительных элементов: электродвигателей, гидравлических и пневматических сервоприводов. Нелинейная характеристика может быть описана следующими

уравнениями:

$$y = \begin{cases} y = \kappa(x - b) & \text{при } x \geq b; \\ y = \kappa(x + b) & \text{при } x \leq -b; \\ 0 & \text{при } |x| < b. \end{cases}$$



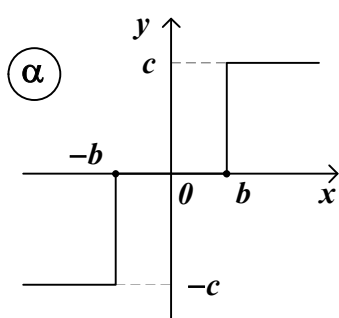
### в) насыщение или ограничение мощности.

Эта нелинейность характерна для гидравлических сервоприводов с золотниковым управлением, если ход золотника больше длины его окон: после того как окна полностью откроются, перемещение золотника  $x$  уже не меняет количество жидкости, поступающей в единицу времени под поршень сервопривода и скорость сервопривода остаётся постоянной  $y = const$ .

Нелинейность типа насыщения характерна для электронных, магнитных и других усилителей, мощность которых всегда ограничена. При кусочно-линейной аппроксимации характеристика с насыщением описывается уравнением

$$y = \begin{cases} kx & \text{при } |x| \leq b; \\ c & \text{при } x > b; \\ -c & \text{при } x < -b. \end{cases}$$

### г) релейная характеристика.

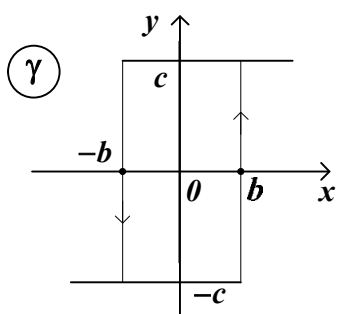


Релейной характеристикой называется зависимость, при которой непрерывному изменению входной переменной соответствует скачкообразное изменение выходной переменной

Симметричная релейная статическая характеристика с зоной нечувствительности ( $\alpha$ ), отражающая функционирование трёхпозиционного реле, описывается такими уравнениями:

$$y = \begin{cases} c & \text{при } x \geq b; \\ 0 & \text{при } |x| < b; \\ -c & \text{при } x \leq -b. \end{cases}$$

Пренебрегая малой зоной нечувствительности можно получить идеальную релейную характеристику ( $\beta$ ),



описываемую уравнениями:  $y = \begin{cases} c & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ -c & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Релейную статическую характеристику с зоной неоднозначности ( $\gamma$ ) имеет двухпозиционное поляризованное

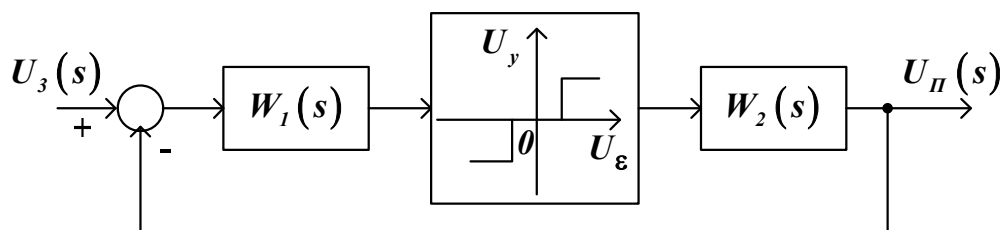
реле.

### III. ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Наличие в замкнутых автоматических системах нелинейных функциональных элементов является причиной возникновения в них особых режимов, не свойственных линейным системам.

**Автоколебания.** При определенных значениях коэффициента передачи разомкнутой системы -  $k$  нелинейная замкнутая система может находиться на границе устойчивости и при этом в ней возникают устойчивые колебания. Такие колебания называются *автоколебаниями*. Они поддерживаются за счёт энергии системы, а их амплитуда и частота зависят от соотношения параметров всех элементов, входящих в замкнутый контур. Анализ нелинейных систем, в первую очередь, сводится к установлению наличия автоколебаний и определению их параметров (амплитуды, частоты и сдвига по фазе).

Рассмотрим подход к решению этой задачи на примере структурной схемы



нелинейной САП.

Пусть параметры системы будут такими, при которых в ней установился режим автоколебаний, т.е.

по замкнутому контуру системы будет циркулировать гармонические сигналы.

Предположим, что на вход нелинейного элемента поступают колебания одной частоты

$$u_\epsilon(t) = A \sin \omega t,$$

тогда его выходная величина  $u_y(t)$

будет представлять собой совокупность прямоугольных импульсов, следующих с частотой  $\omega$ .



Выходную величину  $u_y$  можно разложить в ряд Фурье и представить в форме синусоидальных колебаний с частотой  $\omega$  (первой гармоники) и гармоник высшего порядка с частотами  $3\omega$ ,  $5\omega$  и т.д. Поскольку высшие гармоники имеют более высокую частоту, то при их прохождении через линейные функциональные элементы с передаточными функциями  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ , обладающих свойством фильтров, амплитуды этих гармоник в значительной мере ослабнут. Поэтому можно считать, что на вход нелинейного элемента поступает только первая гармоника, как мы и предположили вначале. Это предположение тем более справедливо, чем в большей мере линейная часть системы

выполняет роль фильтра.

Поскольку высшие гармоники сильно ослабляются, то в первом приближении их можно вообще не учитывать и считать, что при подаче на вход нелинейного элемента синусоидального сигнала с амплитудой  $A$  и частотой  $\omega$  на его выходе будут колебания только первой гармоники с амплитудой  $B$  ( $u_y = B \sin \omega t$ ). Существенно, что амплитуда выходного сигнала зависит от амплитуды входного, т.е.  $B = B(A)$ .

Наличие гармоники на выходе при подаче на вход сигнала одной частоты свойственно только линейным функциональным элементам. Поэтому при сделанных допущениях нелинейный элемент системы можно заменить эквивалентным линейным элементом, коэффициент усиления которого зависит от амплитуды входного сигнала

$$W_{\text{эк}}(s) = \frac{U_y(s)}{U_x(s)} = \frac{B(A)}{A}.$$



Замена нелинейного элемента, находящегося под действием гармонического входного сигнала, эквивалентным линейным элементом называется *гармонической линейризацией*.

Аналитическое обоснование гармонической линейризации выполненное советскими учёными Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым, основывается на принципе гармонического баланса (равенства) частот, амплитуд и фаз выходного сигнала эквивалентного линейного элемента и первой гармоники выходного сигнала реального нелинейного элемента. Гармоническая линейризация нелинейностей позволяет свести исследования режима автоколебаний в нелинейных системах к известным методам исследования устойчивости линейных систем.

**Метод Л.С. Гольдфарба.** Этот метод основывается на использовании частотного критерия Найквиста-Михайлова и методе гармонической линейризации нелинейностей.

Заслугой Л.С. Гольдфарба, помимо разработки метода, является то, что он построил графики эквивалентных коэффициентов усиления для типовых нелинейных элементов.

### ***Абсолютная устойчивость.***



Устойчивость нелинейной системы при любом характере статической характеристике располагающейся в соответствующем секторе называется *абсолютной*.

Условия абсолютной устойчивости для различных систем получены учёными В.М. Поповым, А.М. Летовым, Н.Н. Красовским, А.И. Лурье и другими учёными на основании прямого метода А.М. Ляпунова. Эти условия связывают определенными соотношениями параметры элементов нелинейной системы.



*От умного научишься, от глупого разучишься*